PROBLEMES DE PERMUTATION DE LIMITES.

Ex. 1 : Interversion de signes $\sum$.

1) On rappelle que $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x}$ si $x > 1$. Rappeler la somme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ pour $|z| < 1$.

2) Etablir que $\sum_{k\geq 2}(\zeta(k) - 1) = 1$ et que la série double $\sum_{n\geq 2,\ k\geq 2} \frac{1}{n^k}$ converge. En déduire la valeur de $\sum_{k\geq 2}(-1)^k(\zeta(k) - 1)$ (décomposer la fraction $\frac{1}{n^2+n}$).

3) En notant γ la constante d'Euler, démontrer que $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\zeta(k)-1}{k} = 1 - \gamma$.

4) La série $\sum_{k\geq 2} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)$ est-elle absolument convergente ? Convergente ? Vérifier que la série double $\sum_{k\geq 2,\ n\geq 1} \frac{1}{kn^k}$ diverge. En écrivant $\zeta(k) = (\zeta(k) - 1) + 1$, établir $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k) = \gamma$.

Ex. 2 : Produit infini pour sin. On rappelle que $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, pour $z \in \mathbb{C}$.

1) Démontrer, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, que si $n = 2p + 1$ est *impair*, alors il existe $P_n \in \mathbb{C}[X]$ de degré n tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait : $\sin(nz) = P_n\big(\sin(z)\big)$. On exprimera $\cos(nz)$ à l'aide de $\cos(z)$ et d'un polynôme en $\sin(z)$.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que l'on a l'égalité : $\sin(nz) = n\,\sin(z) \prod_{k=1}^{p}\left[1 - \left(\frac{\sin(z)}{\sin(\frac{k\pi}{n})}\right)^2\right]$.

3) Si $z \in \mathbb{C}$, déterminer $\lim_{n\to+\infty} n\sin(\frac{z}{n})$. En déduire qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$, dépendant uniquement de z, tel que, pour tout $k \geq k_0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $k \geq n\sin(\frac{z}{n})$. On considère la branche principale $\ln_{\mathbb{C}}$ du logarithme (sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$). Montrer la relation, pour $z \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$, avec $n = 2p + 1$,

$$\sin(z) = n\sin(\frac{z}{n}) \prod_{1\leq k<k_0}\left[1 - \left(\frac{\sin(\frac{z}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})}\right)^2\right] \times \exp\left\{\sum_{k\geq k_0} \ln_{\mathbb{C}}\left[1 - \left(\frac{\sin(\frac{z}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})}\right)^2 1_{k\leq p}\right]\right\}.$$

4) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est fixé, la série $\sum_{k\geq k_0} \ln_{\mathbb{C}}\left[1 - \left(\frac{\sin(\frac{z}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})}\right)^2 1_{k\leq p}\right]$ est uniformément convergente en p. Démontrer alors que pour $z \in \mathbb{C}$, $\sin(z) = z\lim_{p\to+\infty} \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2k^2}\right) = z\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2k^2}\right)$.

Ex. 3 : Une série de fonctions. On considère, pour $x > -1$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$.

1) Etudier la convergence simple, absolue de la série. Donner des intervalles où il y a convergence uniforme (normale ?) de la série. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 0} f(x)$, ainsi que $\lim_{x\to-1^+} f(x)$.

2) *a)* Donner des intervalles où les séries dérivées CVN, et prouver que $f \in \mathcal{C}^\infty(]-1,+\infty[)$.

b) Démontrer que si $x = z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,...\}$, $f(x) = f(z)$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ à pôles simples en les -1, -2, ... On pourra séparer parties réelles et imaginaires, ou écrire $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+z} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + (-1)^{n-1}(\dfrac{1}{n+z} - \dfrac{1}{n})$.

3) Vérifier que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{-x}{n}\right)^k\right]$, pour quels x ? La série double $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{n^{k+1}}$ est-elle convergente ? En écrivant dans l'égalité précédente $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{-x}{n})^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{-x}{n})^k$, établir que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-x)^k\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}}\right]$. Quel est le rayon de la série entière ainsi obtenue ?

4) Calculer, pour $x > -1$, $\int_0^1 t^{n+x-1}\,dt$. En déduire que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^{n-1}t^{n+x-1}\,dt$. Que vaut la quantité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 t^{n+x-1}\,dt$? Calculer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\int_0^1(-1)^{n-1}t^{n+x-1}\,dt$ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{N+x}}{1+t}\,dt$. Passer à la limite quand $N \to +\infty$ pour en déduire que si $x > -1$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{t+1}\,dt$. Retrouver alors les valeurs classiques $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, et donner $f(\frac{1}{3})$.

Ex. 4 : Fonction d'Airy. On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $Ai(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp\left(ixt + i\frac{t^3}{3}\right)\,dt$.

1) Vérifier que Ai est bien définie comme intégrale semi-convergente. Vérifier qu'un calcul *formel* donne $Ai''(x) = xAi(x)$. Peut-on facilement justifier ceci par dérivation d'une intégrale impropre ?

2) Pour $T > 0$, appliquer la formule de Cauchy à la fonction $f(z) = \exp\left(ixz + i\frac{z^3}{3}\right)$ sur le contour qui est le bord (orienté) du rectangle $[-T,T]\times[0,1]$. Montrer que $t \mapsto \exp\left(ix(t+i) + \dfrac{i}{3}(t+i)^3\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (calculer son module).

3) Démontrer que, lorsque $T \to +\infty$, $\displaystyle\int_0^1 \exp\left(ix(T+it) + \frac{i}{3}(T+it)^3\right)\,dt \to 0$. En déduire que $Ai(x)$ converge et que pour $x \in \mathbb{R}$, $Ai(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp\left(ix(t+i) + \frac{i}{3}(t+i)^3\right)\,dt$. Vérifier alors que $Ai \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et que $Ai''(x) = xAi(x)$.

Références :

• Ramis-Odoux-Deschamps, *Analyse - IV*, **Ex. 2**.