Université de Nice-Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de Mathématiques
Année 2006-2007

Développement: Polynômes orthogonaux

Sources: Arnaudiès-Fraysse, Gourdon, Chamber-Loir.

1. Préliminaires

Dans toute cette séance, on se donne $a < b$ deux réels et une fonction $w \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que $w(x) > 0$ presque-partout. Sur $\mathbb{R}[X]$, on considère la forme bilinéaire:

$$\langle P, Q\rangle = \int_a^b P(x)Q(x)w(x)\,dx$$

pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrez que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. En orthonormalisant la base canonique $\{X^n / \, n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}[X]$, montrez qu'il existe une base orthonormée $\{P_n / \, n \in \mathbb{N}\}$ telle que $\deg P_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le coefficient de plus haut degré de chacun de ces polynômes est positif.

3. Montrez que $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}\{P_0, ..., P_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Montrez que $\{P_n / \, n \in \mathbb{N}\}$ est l'UNIQUE base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg P_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le coefficient de plus haut degré de chacun de ces polynômes est positif. On notera γ_n le coefficient de plus haut degré de P_n.

5. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\int_a^b P_n P w\, dx = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P < n$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez par l'absurde que P_n est scindé. Indication: si P_n n'est pas scindé, on pourra trouver un polynôme P de degré $< n$ tel que $P_n P$ est de signe constant, et utiliser **5.** pour obtenir une contradiction.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez que P_n est un polynôme scindé à racines simples dont les racines sont dans l'intervalle $]a, b[$.

2. Précision sur les zéros de P_n

8. Montrez qu'il existe des suites $(a_n), (b_n), (c_n) \in \mathbb{R}$ telles que

$$P_n(x) = (a_n x + b_n)P_{n-1}(x) + c_n P_{n-2}(x)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminez explicitement a_n, b_n, c_n.

9. En déduire que

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(x)P_i(y) = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$$

pour $x \neq y$. En faisant tendre y vers x, en déduire une expression de $P'_{n+1}P_n - P'_nP_{n+1}$.
10. Déduire de la question précedente que pour tout $n \geq 1$, il y a exactement un zéro de P_n entre deux zéros de P_{n+1}.

3. Application: méthode d'intégration de Gauss

11. On fixe dans cette section $n \in \mathbb{N}^\star$, et donc le polynôme P_n. On note $x_1 < ... < x_n$ ses racines et $\gamma_n > 0$ son cœfficient dominant, de sorte que $P_n = \gamma_n(X - x_1)...(X - x_n)$.
12. Montrez qu'il existe des réels strictement positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a

$$\int_a^b Q(x)w(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q(x_i).$$

On pourra pour cela utiliser une interpolation en utilisant l'unique polynôme $\tilde{Q}$ de degré $n-1$ tel que $\tilde{Q}(x_i) = Q(x_i)$.
13. Montrez que pour tout i, on a

$$\lambda_i = -\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n P_{n+1}(x_i)Pn'(x_i)}.$$

11. Montrez que le choix des x_i et des λ_i est le seul qui rende exacte la formule du **12.** pour les polynômes de degré $2n-1$.
12. Soit $f \in C^\infty([a,b])$. Donnez une majoration de

$$\left| \int_a^b f(x)w(x)\,dx - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \right|$$

en fonction de f^{2n}. On pourra utiliser pour cela une interpolation d'Hermite à partir des $f(x_i)$ et des $f'(x_i)$.