Prolongement de la fonction Γ d'Euler.

La fonction Γ d'Euler est initialement définie pour $x > 0$ par $\Gamma(x) \equiv \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

Exercice 1 : Prolongement méromorphe de Γ à $\mathbb{C}$.

1) Prolongement à $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$. Vérifier que pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$, la formule

$$\Gamma(s) \equiv \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(s-1)\ln(t)}e^{-t}\,dt$$

définit une fonction holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$ qui prolonge la fonction Γ.

2) Etablir par une intégration par parties que, pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, on a $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Calculer $\Gamma(1)$, puis $\Gamma(n)$ pour $n \geq 1$.

3) Vérifier alors que dans $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > -1\}$, la formule $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$ définit une fonction méromorphe, avec un pôle simple en $s = 0$ de résidu 1, qui prolonge Γ.

4) Montrer que si $s \in \mathbb{C}$, pour $n \in \mathbb{Z}$, $n > -\,\mathrm{Re}(s)$, la quantité

$$\frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}$$

est bien définie, indépendante de $n > -\,\mathrm{Re}(s)$, et est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ de pôles simples en les $-p$, $p \in \mathbb{N}$, de résidu $\frac{(-1)^p}{p!}$, qui prolonge Γ. Ce prolongement méromorphe de Γ est-il unique ?

5) Autre méthode pour prolonger Γ. Pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$, on a :

$$\Gamma(s) = \int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

a) Vérifier que la deuxième intégrale est une fonction holomorphe de s sur $\mathbb{C}$.

b) Pour $0 < t \leq 1$, établir que $t^{s-1}e^{-t} = t^{s-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+s-1}$, avec convergence normale de la série sur $[0, 1]$ pour s fixé. En déduire que

$$\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+s},$$

se prolonge aussi en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, à pôles simples en les $-p$, $p \in \mathbb{N}$, de résidu $\frac{(-1)^p}{p!}$. On utilisera le théorème sur les séries de fonctions méromorphes.

Exercice 2 : Prolongement holomorphe de $\dfrac{1}{\Gamma}$ à $\mathbb{C}$.

1) Démontrer que la suite $\big(1-\frac{t}{n}\big)^n 1_{[0,n]}$ converge vers e^{-t} en croissant (ou bien en étant majorée par e^{-t}, en utilisant $\ln(1-u) \leq -u$ pour $0 \leq u \leq 1$). En déduire que pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$,

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{s-1}\big(1-\frac{t}{n}\big)^n\, dt.$$

2) Si $n \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(s) > 0$, poser $t = nu$ et intégrer par parties n fois,

$$\int_0^n t^{s-1}\big(1-\frac{t}{n}\big)^n\, dt = n^s \int_0^1 u^{s-1}\big(1-u\big)^n\, du = n^s \frac{n}{s}\int_0^1 u^s\big(1-u\big)^{n-1}\, du = ...,$$

et en déduire la *formule d'Euler*

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

Remarque : $B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,du$, $x > 0$ et $y > 0$ s'appelle fonction Bêta d'Euler.

3) Produits infinis et formule de Weierstrass. En écrivant, pour $s \in \mathbb{C}$,

$$n^s = \exp(s\ln n) = \exp\Bigg(-\gamma s + s\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + o(1)s\Bigg),$$

où γ est la constante d'Euler, démontrer la *formule de Weierstrass*, si $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^n \Big(e^{-\frac{x}{k}}\big(1+\frac{x}{k}\big)\Big) = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(e^{-\frac{x}{n}}\big(1+\frac{x}{n}\big)\Big).$$

4) On montre maintenant que la suite de fonctions holomorphes $\big(\prod_{k=1}^n e^{-\frac{s}{k}}\big(1+\frac{s}{k}\big)\big)_n$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et écrivons, pour $n > 2p$,

$$\prod_{k=1}^n \Big(e^{-\frac{s}{k}}\big(1+\frac{s}{k}\big)\Big) = \prod_{1\leq k<2p} \times \prod_{2p\leq k\leq n}\Big(e^{-\frac{s}{k}}\big(1+\frac{s}{k}\big)\Big).$$

On rappelle que l'on peut définir $\ln_{\mathbb{C}}(1+z)$ pour $|z| < 1$ par exemple par la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$. Justifier que $\ln_{\mathbb{C}}(1+z) = z + \mathcal{O}(|z|^2)$ pour $|z| \leq \frac{1}{2}$. Si $|s| \leq p$, écrire le deuxième produit comme

$$\exp\Bigg(\sum_{k=2p}^n \ln_{\mathbb{C}}\big(1+\frac{s}{k}\big) - \frac{s}{k}\Bigg).$$

Justifier que la série $\sum_{k\geq 2p}\ln_{\mathbb{C}}\big(1+\frac{s}{k}\big) - \frac{s}{k}$ converge normalement sur $D_p(0)$. Conclure alors que

$$se^{\gamma s}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n\Big(e^{-\frac{s}{k}}\big(1+\frac{s}{k}\big)\Big)$$

est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ (on dit entière), que ses zéros sont exactement les $-p$, $p \in \mathbb{N}$, et que cette fonction prolonge $\frac{1}{\Gamma}$. En déduire que le prolongement méromorphe de Γ à $\mathbb{C}$ ne s'annule jamais.

Références :

- L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les Sciences Physiques.* Chap. 8 Hermann. Ex. 1, 3) et 4); Ex. 2. 3) et 4).
- C. Zuily et H. Queffelec, *Eléments d'Analyse pour l'agrégation.* Chap. IX, I.8 Ellipses.
- A. Chambert-Loir & al. *Exercices d'Analyse pour l'agrégation - II.* Ex. 20-3 Masson.
- X. Gourdon, *Les Maths en tête - Analyse.* p. 290 Ellipses.
- W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.* Dunod/Masson.