Université de Nice-Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de Mathématiques
Année 2006-2007

TD: Thérorèmes de point fixe

Exercice 1: Soit I un intrevalle compact non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f \in C^0(I, I)$. Montrez que f possède un point fixe.

Exercice 2: Soit E un espace vectoriel réel normé de dimension finie et G un sous-groupe compact de $Gl(E)$. Soit K un compact convexe de E. On cherche à montrer que si $G(K) \subset K$, alors il existe $x \in K$ tel que $g(x) = x$ pour tout $g \in G$.

(a) Montrez le résultat dans le cas où G est fini.

On se place maintenant dans le cas général

(b) Soit $\|\cdot\|_2$ une norme Euclidienne sur E. Et soit $\|x\| := \sup\{\|g.x\|_2 / g \in G\}$ pour $x \in E$. Montrez que $\|\cdot\|$ est une norme sur E qui rend les éléments $g \in G$ des isométries.

(c) Soit $\phi \in L_c(E)$ telle que $\phi(K) \subset K$. Montrez que ϕ possède un point fice dans K.

(d) On raisonne par l'absurde et on suppose que pour tout $x \in K$, il existe $g \in G$ tel que $g.x \neq x$. Pour $g \in G$, on pose $\Omega_g = \{x \in K / \, g.x \neq x\}$. En utilisant un recouvrement ouvert de K et (c), déduire une contradiction.

Exercice 3: Soit G un sous-groupe fermé de $Gl_n(\mathbb{R})$. Montrez que G est compact ssi il existe q une forme linéaire définie positive sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset O(q)$ (cad $q \circ g = q$ pour tout $g \in G$). Indication: utilisez l'exercice 2.

Exercice 4: Le théorème de Brouwer en dimension 2. Soit $f : \overline{B}(0,1) \to \overline{B}(0,1)$ une fonction continue. On cherche à montrer que f possède un point fixe.

(a) Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ une application continue telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$ (on sit que c'est un lacet fermé). Montrez qu'il existe $\varphi \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\gamma(t) = e^{i\varphi(t)}$ pour tout $t \in [0,1]$. On définit alors l'indice

$$\mathrm{Ind}_\gamma := \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi}$$

où φ est comme plus haut

(c) Montrez que la définition de l'indice est licite.

(d) On dit que deux lacets fermé γ_0 et γ_1 sont homotopes si il existe $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ continue telle que $h(0,t) = \gamma_0(t)$ et $h(1,t) = \gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0,1]$. Montrez que deux lacets homotopes ont même indice.

(e) On suppose que f n'a pas de point fixe. Montrez qu'on peut alors construire une fonction $g : B(0,1) \to \mathbb{S}^1$ continue telle que $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{S}^1$.

(f) On pose $\gamma_0(t) = (1,0)$ et $\gamma_1(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ pour $t \in [0,1]$. En utilisant la convexité de la boule, montrez que $g \circ \gamma_0$ et $g \circ \gamma_1$ sont homotopes. En déduire une contradiction par le calcul des indices.