Questions choisies : Analyse & Probabilités - 1999.

Il est souhaitable de traiter la Question 1 chez vous....

On note H l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{+\infty} \bar{x}_j y_j,$$

et de la norme $||\cdot||$ associée. $\mathcal{L}(H)$ désigne l'espace des applications $T : H \to H$ linéaires continues, muni de la norme

$$||T||_{\mathcal{L}} = \sup\{||Tx||,\ ||x|| \leq 1\}.$$

On admet que $(\mathcal{L}(H), ||\cdot||_{\mathcal{L}})$ est complet. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, on dit que T est *inversible* s'il existe $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $ST = TS = Id$; et on note $T^* : H \to H$ par la formule

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle.$$

Question 1 : Soit $D : H \to H$ défini par : si $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$, alors $Dx = (x_{j+1})_{j \in \mathbb{N}}$.

a) Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$ et $\mathrm{Im}(D)$.

b) Montrer que $D \in \mathcal{L}(H)$ et calculer $||D||_{\mathcal{L}}$.

c) Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$, $T^* \in \mathcal{L}(H)$ et $||T^*||_{\mathcal{L}} = ||T||_{\mathcal{L}}$.

d) Déterminer l'adjoint D^* de D et vérifier que $DD^* = Id$.

e) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $|\lambda| < 1$, on définit $x_\lambda = (\lambda^j)_{j \in \mathbb{N}}$. Vérifier que $x_\lambda \in H$ et montrer que $Dx_\lambda = \lambda x_\lambda$.

f) Montrer que si $g \in H$ est tel que $\langle g, x_\lambda \rangle = 0$ pour tout $|\lambda| < 1$, alors $g = 0$. En déduire que $\mathrm{Vect}(x_\lambda,\ |\lambda| < 1)$ est dense dans H.

Question 2 : *a)* Démontrer que si T, $S \in \mathcal{L}(H)$, alors $||TS||_{\mathcal{L}} \leq ||T||_{\mathcal{L}}||S||_{\mathcal{L}}$.

b) Montrer que si $N \in \mathcal{L}(H)$ et $||N||_{\mathcal{L}} < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0}(-N)^n$ est convergente. En déduire que $Id + N \in \mathcal{L}(H)$ est inversible.

c) On suppose $T \in \mathcal{L}(H)$ inversible. Montrer que si $||N||_{\mathcal{L}}||T^{-1}||_{\mathcal{L}} < 1$, alors $T + N$ est inversible.

d) Démontrer l'existence de $m \in \mathbb{R}$ tel que, si $||N||_{\mathcal{L}} \leq \dfrac{1}{2||T^{-1}||_{\mathcal{L}}}$, on a :

$$||(T+N)^{-1} - T^{-1} + T^{-1}NT^{-1}||_{\mathcal{L}} \leq m||N||_{\mathcal{L}}^2.$$

Question 3 : Pour $T \in \mathcal{L}(H)$, on appelle *spectre* de T l'ensemble

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ T - \lambda Id \text{ n'est pas inversible } \},$$

et on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T s'il existe $x \in H$, $x \neq 0$ tel que $Tx = \lambda x$ (autrement dit, $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id) \neq \{0\}$). On définit aussi $\rho(T) = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma(T)\}$.

a) Montrer que $\sigma(T)$ est un fermé de $\mathbb{C}$, qui contient les valeurs propres de T. Démontrer que $\rho(T) \leq ||T||_{\mathcal{L}}$.

b) Déterminer le spectre $\sigma(D)$ de D (*cf.* Question 1).

c) Caractériser $\sigma(T^*)$ en fonction de $\sigma(T)$. En déduire $\rho(T^*) = \rho(T)$.

Question 4 : Soit x, $y \in H$. On définit $f_{x,y} : \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \to \mathbb{C}$ par $f_{x,y}(z) = \langle y, (zId - T)^{-1}x\rangle$.

a) Montrer que $f_{x,y}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.

b) Justifier que $\lim_{|z|\to+\infty} zf_{x,y}(z) = \langle y, x\rangle$.

c) En déduire que $\sigma(T) \neq \emptyset$.