Questions choisies : Maths. Générales - 2001.

Question 1 : Soit K un convexe compact dans $\mathbb{R}^n$, satisfaisant $0 \in \overset{\circ}{K}$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On pose $I_x = \{\lambda \in \mathbb{R}^+,\ x \in \lambda K\}$. Montrer que I_x est un intervalle fermé non majoré de $\mathbb{R}$.

b) On pose $j_K(x) = \inf I_x$, et ∂K désigne la frontière de K. Démontrer que

$$x \in K \Longleftrightarrow j_K(x) \leq 1 \qquad \text{et} \qquad x \in \partial K \Longleftrightarrow j_K(x) = 1.$$

c) On suppose en outre K stable par la symétrie par rapport à 0 (on dira 0-symétrique). Montrer que j_K est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Question 2 : Soit K un convexe compact dans $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$. On note

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n,\quad \forall x \in K, \langle x, y\rangle \leq 1\}.$$

a) Montrer que K^* est un convexe compact tel que 0 est intérieur à K^*, et que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\quad j_{K^*}(y) = \max\{\langle x, y\rangle,\quad x \in K\}.$$

b) On suppose en outre que K est 0-symétrique. Montrer que j_{K^*} est une norme. Que dire de $(\mathbb{R}^n, j_K)$ et $(\mathbb{R}^n, j_{K^*})$?

Question 3 : On appelle ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ un ensemble du type $E(A) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, Ax\rangle \leq 1\}$, où A est une matrice symétrique définie positive. L'ensemble $\mathcal{E}$ des ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$ est vu comme un sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de la topologie induite.

a) Soit A une matrice symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice B symétrique définie positive telle que $B^2 = A^{-1}$. En déduire qu'un ellipsoïde est l'image de la boule unité par une application linéaire.

b) Montrer que l'application $A \mapsto \big(\det(A)\big)^{-\frac{1}{2}}$ de l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques définies positives dans $\mathbb{R}_+^*$ est strictement convexe (on pourra songer à considérer le logarithme).

Question 4 : Soit K un convexe compact dans $\mathbb{R}^n$ 0-symétrique tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$.

a) Soit v un réel strictement positif. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_{K,v}$ des ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$ de volume supérieur à v et inclus dans K est une partie compacte de $\mathcal{E}$.

b) En déduire qu'il existe un unique ellipsoïde E_K de $\mathbb{R}^n$ inclus dans K et de volume maximal pour cette propriété.

Question 5 : *a)* Soit K un convexe compact dans $\mathbb{R}^n$ 0-symétrique tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$. On note Is_K le groupe des automorphismes linéaires de $\mathbb{R}^n$ tels que $u(K) = K$. Montrer qu'il existe une forme quadratique définie positive invariante par Is_K, *i.e.*

$$\forall u \in Is_K, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad q_K(u(x)) = q_K(x).$$

b) Donner E_K et une forme q_K possible dans chacun des exemples suivants :

(i) K est le disque unité (euclidien) de $\mathbb{R}^2$.
(ii) K est le carré $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$.
(iii) K est un parallélogramme, dans $\mathbb{R}^2$, de centre 0.

Quelques indications :

• Le résultat suivant peut être utile pour la question **3)***b)* :

Démontrer que si A et B sont des matrices $n \times n$ symétriques avec A définie positive, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que

$$A = {}^tPP \qquad \text{et} \qquad B = {}^tPDP.$$

Il peut aussi permettre de démontrer le résultat suivant :

Si A et B sont des matrices réelles $n \times n$ symétriques et positives, démontrer que

$$\big(\det(A)\big)^{\frac{1}{n}} + \big(\det(B)\big)^{\frac{1}{n}} \leq \big(\det(A+B)\big)^{\frac{1}{n}},$$

et qu'il n'y a égalité que si A et B sont positivement proportionnelles.

En déduire que la fonction $A \mapsto \big(\det(A)\big)^{\frac{1}{n}}$, définie sur l'ensemble des matrices symétriques positives est concave. Est-elle strictement concave ?

• Le résultat suivant peut être utile pour la question **5)***a)* :

Soit $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ ou $GL_n(\mathbb{C})$ un groupe borné (ou compact) de matrices. Montrer que pour tout $g \in G$, on a $|\det(g)| = 1$.