Université de Nice-Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de Mathématiques
Année 2006-2007

TD: Réduction des endomorphismes

Dans toute cette feuille, E désigne un $K-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ où K est un corps commutatif.

Exercice 1: Soit u un endomorphisme de E. Montrez que u est diagonalisable ssi (son polynoôme caractéristique est scindé et $\text{rg}(u - \lambda Id_E) = \text{rg}(u - \lambda Id_E)^2$ pour tout $\lambda \in K$)

Exercice 2: Soit u un endomorphisme de E. Montrez que u est nilpotent ssi $u^n = 0$.

Exercice 3: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé. Montrez que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ssi A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4: Soit u un endomorphisme de E diagonalisable. Soit F un sous-espace $u-$stable de E. Montrez qu'il existe un supplémetaire $u-$stable de F.

Exercice 5: Soit u un endomorphisme de E et soit $\lambda \in K$ une valeur proprede u (si cela existe). Soit ν_λ la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de u. On cherche à montrer que $\dim_K \text{SEC}_\lambda(u) = \nu_\lambda$, où $\text{SEC}_\lambda(u) = \text{Ker } (u - \lambda Id_E)^{\nu_\lambda}$.

a. En décomposant E comme somme directe de $\text{SEC}_\lambda(u)$ et d'un espace $u-$stable, montrez que $\dim_K \text{SEC}_\lambda(u) \geq \nu_\lambda$.

b. Montrez que $\dim_K \text{SEC}_\lambda(u) = \nu_\lambda$ dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé.

c. Dans le cas où le polynôme caractéristique n'est pas scindé, utilisez une décomposition de E en deux sous-espaces $u-$stables bien choisis et ramenez-vous à la question précédente.

Exercice 6: Soit u un endomorphisme de E trigonalisable. On suppose que u est inversible. Montrez que u^{-1} est trigonalisable.

Exercice 7: Montrez que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$. Que se passe-t'il sur $M_n(\mathbb{R})$?