THEOREME DU RELEVEMENT.

On rappelle que $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. On suppose connu le fait que l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(it) \in \mathbb{S}^1$ est un morphisme de groupes surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

On va démontrer pour certains espaces X (intervalle, ouvert étoilé de $\mathbb{R}^d$) le résultat de relèvement :

Si $k \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathcal{C}^k(X, \mathbb{S}^1)$, alors il existe $\varphi \in \mathcal{C}^k(X, \mathbb{R})$ telle que $u = \exp(i\varphi)$ sur X.

1) Unicité. Soit X un connexe (métrique), et $\varphi,\ \psi \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ telles que $\exp(i\varphi) = \exp(i\psi)$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\psi = \varphi + 2k\pi$ sur X.

2) Cas $X = [0, 1]$, u de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $u \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{S}^1)$, et $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(0) = \exp(i\varphi_0)$.

a) Si $u = \exp(i\varphi)$ sur $[0, 1]$, calculer φ' en fonction de u et u'. Déduire alors une formule explicite pour φ avec $\varphi(0) = \varphi_0$.

b) Montrer ensuite que cette fonction φ convient en calculant la dérivée de $u \exp(-i\varphi)$. Justifier en outre que si $u \in \mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, alors $\varphi \in \mathcal{C}^k$.

3) Cas $X = [0, 1]$, u continue. On rappelle que la fonction Arg : $\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\} \to]-\pi, \pi[$ définie par $\mathrm{Arg}(x + iy) = 2 \arctan\big(\dfrac{y}{1 + x}\big)$ est continue et vérifie $\exp(i\ \mathrm{Arg}(z)) = z$ pour $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$.

a) En utilisant l'uniforme continuité de u, montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $n \in \{0, ..., N-1\}$ et $t \in [\frac{n}{N}, \frac{n+1}{N}]$, alors $|u(t) - u(\frac{n}{N})| \leq 1$. Utiliser $u\bar{u}(0)$ et la fonction Arg pour déterminer un relèvement de u sur $[0, \frac{1}{N}]$. Poursuivre pour déterminer un relèvement de u sur $[0, 1]$.
b) Etendre au cas d'un intervalle I quelconque.

4) Cas X ouvert étoilé de $\mathbb{R}^d$, et $u \in \mathcal{C}^1$. On suppose X étoilé par rapport à 0. En reprenant la preuve de **1)**, vérifier que la formule $\varphi(x) = \varphi_0 + \displaystyle\int_0^1 \sum_{j=1}^{d} x_j \bar{u}(sx) \frac{\partial u}{\partial x_j}(sx)\ ds$ définit $\varphi \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ qui convient, en considérant $t \mapsto \varphi(tx)$. Démontrer que φ est en fait de classe $\mathcal{C}^k$ sur X (on utilisera là encore la fonction Arg).

5) Cas $X = [0, 1]$, u continue : preuve par densité. Soit $u \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{S}^1)$, prolongée en $\tilde{u} \in \mathcal{C}^0([-1, 2], \mathbb{S}^1)$ en posant $\tilde{u}(x) = u(0)$ si $-1 \leq x \leq 0$ et $\tilde{u}(x) = u(1)$ si $1 \leq x \leq 2$. Montrer qu'il existe $(v_n) \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{C})$ qui converge uniformément vers u sur $[0, 1]$ (on pourra considérer $v_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \tilde{u}(t)\ dt$). En déduire que $u_n = \frac{v_n}{|v_n|}$ est bien définie pour n grand, est $\mathcal{C}^1$ et $u_n \to u$ uniformément sur $[0, 1]$. On suppose $u(0) = 1$, et on considère $\varphi_n^0 = \mathrm{Arg}(u_n(0)) \in]-\pi, \pi[$. Montrer que $\varphi_n^0 \to 0$. Vérifier que $|u_n - u_m| = 2|\sin\big((\varphi_n - \varphi_m)/2\big)|$. En déduire que si n, $m \geq N$ avec N assez grand, alors $|\varphi_n - \varphi_m| \leq \pi$ sur $[0, 1]$ et donc que $(\varphi_n)_{n \geq N}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0, 1])$. Conclure.

Références :

- F. Rouvière, *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Ex. 100.
- A. Chambert-Loir & al., Volume I. *Ex. 3.7 et 3.8*, p. 60-62.