Université de Nice-Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de Mathématiques
Année 2006-2007

TD: Séries numériques

Exercice 1: Calculer, si elle converge, la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. En déduire la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Sans utiliser de comparaison avec une intégrale, en déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Exercice 2: Donnez un équivalent de $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ et de $\sum_{n=2}^{N} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2+\sqrt{n+2}+1}$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 3: Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la suite $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge-t-elle?

Exercice 4: Calculez $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ en utilisant un développement limité de la fonction ln.

Exercice 5: En transformant la suite $S_n := \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n - \ln(n!)$ $(n \geq 1)$ en série, montrez qu'il exists $c > 0$ tel que

$$n! \sim_{n\to+\infty} c \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

Exercice 6: Convergence ou divergence des séries de terme général suivant:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - a - \frac{b}{n}$, $(a, b \in \mathbb{R})$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)^{c\cdot n^\lambda}$, $(c, \lambda > 0)$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha e^{-n^\beta}$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^n\right) \frac{\ln n}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$, $(\alpha > 0)$
(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ $(\alpha, \theta \in \mathbb{R})$
(h) $\sum_{n=n_0}^{\infty} \exp\left(\sin(\pi\sqrt{n^2+an+b})\right) - 1$ $(a, b \in \mathbb{R})$

Exercice 7: Soit une série réelle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergente mais pas absolument convergente. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\epsilon_n \in \{-1, +1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n a_n$.

Exercice 8: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs et soit $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \geq 0$.

(a) On suppose que $\sum a_n$ diverge. Montrez que $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge. Montrez que pour tout $\alpha > 1$, alors $\sum \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ converge.

(b) On suppose que $\sum a_n$ converge, et on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. Montrez que pour tout $\alpha \in]0, 1[$, alors $\sum \frac{a_n}{R_{n-1}^\alpha}$ converge.

Exercice 9: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que (u_n) décroît vers 0.

(a) Montrez que si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} nu_n$ existe et vaut 0. Réciproque?

(b) Montrez que $\sum u_n$ et $\sum nu_n^2$ ont même nature.

Exercice 10: Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{>0})$. On suppose que f'/f a une limite en $+\infty$ et que $\lim_{t\to+\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} = \mu \neq 0$. On suppose que $\int_0^\infty f(t)\, dt$ converge. Montrez que $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ converge et que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \sim_{n\to+\infty} \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_n^\infty f(t)\, dt.$$

Et si $\int_0^\infty f(t)\, dt$ diverge?