Université de Nice-Sophia Antipolis
Agrégation de mathématiques
2006/2007

Développement: Séries de Dirichlet

Le TD proposé est librement inspiré de l'ouvrage de Claude Zuily et Hervé Queffélec. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de complexes: on appelle série de Dirichlet associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

pour les s éventuels pour lesquels cette somme est définie. Ce TD passe en revue quelques propriétés importantes. Dans tout le TD, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de complexes.

1. Convergence

1. Montrez que si $s_0 \in \mathbb{C}$ est tel que $f(s_0)$ converge, alors $f(s)$ est convergente pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que Re $s >$ Re s_0. Indication: on pourra utiliser une transformation de type Abel.

2. Montrez que si $s_0 \in \mathbb{C}$ est tel que $f(s_0)$ converge ABSOLUMENT, alors $f(s)$ est ABSOLUMENT convergente pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que Re $s >$ Re s_0.

3. On définit:

$$\sigma_c := \inf \{x \in \mathbb{R} / \, f(x) \text{ est une série convergente}\}$$

et

$$\sigma_{ac} := \inf \{x \in \mathbb{R} / \, f(x) \text{ est une série absolument convergente}\} .$$

Montrez que la série de Dirichlet converge (resp. converge absolument) pour Re $s > \sigma_c$ (resp. pour Re $s > \sigma_{ac}$) et qu'elle diverge pour Re $s < \sigma_c$ (resp. pour Re $s < \sigma_{ac}$). On n'oubliera pas les cas $\sigma_c, \sigma_{ac} = \pm\infty$!

4. Montrez que $\sigma_c \leq \sigma_{ac} \leq \sigma_c + 1$. Montrez que les cas d'égalité sont possibles (pour cela, on pourra utiliser la suite $a_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$).

2. Holomorphie

5. Montrez que f est holomorphe sur le domaine Re $s > \sigma_c$.

3. Asymptotes

6. On suppose que $(a_n) \not\equiv 0$ et que $\sigma_c < +\infty$. On pose $n_0 = \inf\{n \in \mathbb{N}/a_n \neq 0\}$. Montrez que

$$\lim_{\text{Re } s\to+\infty} n_o^s f(s) = a_{n_0}.$$

7. On suppose que $\sigma_c < +\infty$. Montrez que s'il existe une suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to+\infty}$ Re $s_k = +\infty$ et $f(s_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. La fonction ζ

On considère la série de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

8. Déterminez σ_c et σ_{ac} pour ζ.

9. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Montrez que

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_0^N f(t)\,dt + \int_0^N (t - E(t))f'(t)\,dt$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$, où $E(t)$ désigne la partie entière de t.

10. Déduire du point précédent que la fonction ζ admet un prolongement holomorphe à $\{\mathrm{Re}\ s > 0\} \setminus \{1\}$

Un très beau développement (qui réclame un peu d'investissement rentable) est ensuite de montrer que la fonction ζ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.