Séries entières & théorème d'Abel angulaire.

Ex. 1 : (Mise en forme)
1) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} nz^{3n}$.
2) Soit (a_n) une suite telle que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \to \ell \qquad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

DEVELOPPEMENT : *Théorème d'Abel angulaire.*
On considère une série *convergente* $\sum_{n\geq 0} a_n$, et la série entière $f(z) \equiv \sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

1) Pourquoi le rayon de cette série est-il ≥ 1 ? On fixe $0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ et on note (dessin !)

$$\Delta_{\theta_0} \equiv \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ \exists \rho > 0, \exists \varphi \in [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\varphi}\}.$$

2) Vérifier que pour $z = 1 - \rho e^{i\varphi} \in \Delta_{\theta_0}$ tel que $|1 - z| \leq \cos(\theta_0)$, on a

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{|1-z|}{1-|z|^2}(1+|z|) \leq 2\frac{\rho}{2\rho\cos(\varphi) - \rho^2} \leq \frac{2}{\cos(\theta_0)}.$$

3) On note $S \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n \equiv \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = R_{n-1} - R_n$.
Pour $|z| < 1$, justifier alors la transformation d'Abel :

$$f(z) - S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z^n - 1) = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

4) Soit $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| \leq \varepsilon$ si $n > N$. Pour $|z| < 1$, établir l'inégalité :

$$\big|f(z) - S\big| \leq |z-1|\sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon\frac{|1-z|}{1-|z|}.$$

En déduire alors que

$$\lim_{z\to 1,\ z\in\Delta_{\theta_0}} f(z) \quad \text{existe et vaut} \quad S.$$

On peut en fait établir que $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ converge uniformément sur Δ_{θ_0}.

5) Exemple : On considère la série entière de rayon 1

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln_{\mathbb{C}}(1-z) = -\Big(\ln|1-z| + i\ \arg(1-z)\Big),$$

où, si $\xi \notin \mathbb{R}^-$, $\arg \xi$ est la détermination de l'argument de ξ dans $]-\pi, \pi[$. Vérifier que pour $0 < \theta < 2\pi$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ est semi-convergente. Calculer module et argument de $1 - e^{i\theta}$, et en déduire sa somme.

Ex. 2 : Calcul de rayons. Déterminer les rayons de convergence de

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(n)}{n}z^n,\qquad \sum_{n\geq 1}\Big(1+\frac{3}{n}\Big)^{(n^2)}z^{3n}\qquad\text{et}\qquad \sum_{n\geq 2}\Big(\frac{1}{\ln(n)}-\frac{n^n}{e^n n!}\Big)z^n.$$

Ex. 3 : Série lacunaire à points singuliers sur tout un cercle. On considère la série entière lacunaire

$$f(z)\equiv\sum_{n\geq 0}z^{(2^n)}.$$

1) Déterminer son rayon de convergence. Vérifier que f n'est pas bornée sur $[0,1[$, donc que 1 est un point singulier pour f.

2) Etablir que, pour $|z|<1$, $f(z^2)=f(z)+z$. En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}$, les racines 2^k-ième de l'unité sont des points singuliers pour f, puis que tout point du cercle $|z|=1$ est singulier pour f.

3) On envisage la série entière $g(z)\equiv\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{z^{(2^n+1)}}{2^n+1}$. Déduire de **2)** que g a pour rayon 1, et que tout point du cercle $|z|=1$ est singulier pour g. Montrer que g admet pourtant un prolongement continu sur le disque fermé $|z|\leq 1$.

4) *Singularités plus subtiles.* On considère la série entière

$$f(z)\equiv\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\sqrt{n}}z^n.$$

Vérifier que f a pour rayon 1. On fixe $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\varphi(z)=1$ pour $|z|\leq 1$, et on définit

$$F(z)\equiv\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\sqrt{n}}z^n\varphi(z^n).$$

Etablir que $F\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ est un prolongement de f à $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ tout entier, mais pas analytique. $\Big($Sur les séries lacunaires (séries du type $\sum_{n\geq 0}a_n z^{\lambda_n}$ avec $\lambda_n\gg n$), voir Rudin ou Zuily-Queffellec$\Big)$.

Ex. 4 : Comportement au bord. Soient $\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0}b_n x^n$ deux séries entières de rayon $R\geq 1$. On suppose $a_n\sim b_n>0$ et $\sum_{n\geq 0}b_n$ divergente.

1) Montrer que $R=1$ et que, lorsque $x\to 1^-$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n\sim\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n$.

2) Si $a_n\sim n^p$, $p\in\mathbb{N}$, établir que, lorsque $x\to 1^-$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n\sim\frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$. Quelle pourrait être la formule si $p>0$ n'est pas entier ?

Références :

- **Dvlpt** (*Application*) : Arnaudiès & Fraysse (ou Lelong-Ferrand & Arnaudiès), *Cours de Mathématiques - Compléments Analyse.* Dunod, Chap. III.
- **Ex. 3 :** W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.* Dunod/Masson, Chap. 16.
- **Dvlpt :** X. Gourdon, *Les maths en tête (Analyse).* Ellipses.
- **Ex. 4 :** Chambert-Loir & al., *Exercices d'Analyse - I*, Masson. Ex. 6-4;
- Zuily-Queffellec, Eléments d'Analyse pour l'Agrégation, Masson (Chap. III et IV).