SERIES DE FOURIER.

Ex. 1 : Existe-t-il $f \in \mathcal{C}^1$ telle que $c_n(f) = \dfrac{1}{1+|n|}$? Et telle que $c_n(f) = \dfrac{1}{(1+|n|)^3}$? Existe-t-il $f \in L^1$ telle que $c_n(f) = \dfrac{1}{1+|n|}$?

Ex. 2 : Quelques points du cours.
1) Démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue. On commencera par $f \in \mathcal{C}^1$ puis on approchera $f \in L^1$ par des fonctions $\mathcal{C}^1$ (si $g \in \mathcal{C}^0$, alors $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} g(t)\,dt \in \mathcal{C}^1$ et $g_\varepsilon \to g$ dans $\mathcal{C}^0$ si $\varepsilon \to 0$).

2) Calculer les noyaux D_N et F_N. Vérifier que $(F_N)_{N\geq 0}$ est bien une approximation de l'identité (on vérifiera que si $0 < \delta < \pi$, $F_N \to 0$ uniformément sur $\{\delta \leq |x| \leq \pi\}$).

3) Démontrer le théorème de Fejér. En déduire que $\mathfrak{F} : L^1 \to c_0$ est injective. Montrer alors que si $f \in L^1$ et $S_N(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F, alors $f = F \in \mathcal{C}^0$ (considérer les coefficients de Fourier de $g = f - F$).

4) Démontrer la densité de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{C}^0$ par deux méthodes : en utilisant le théorème de Fejér; en utilisant le théorème de la convergence normale, montrer que $\overline{\mathcal{P}}$ contient $\mathcal{C}^1$, et conclure. Justifier que $\mathcal{P}$ est dense dans L^p pour $1 \leq p < \infty$.

Ex. 3 : Divergence des séries de Fourier. On souhaite montrer l'existence d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0 avec deux méthodes, l'une non constructiviste, l'autre oui.

1) Suivre Gourdon, Ex. 8 p. 399, pour montrer que la forme linéaire $\ell_N : \mathcal{C}^0 \ni f \mapsto \ell_N(f) = S_N(f)(0) = D_N * f(0) \in \mathbb{C}$ est continue, de norme $||\ell_N|| = |D_N|_{L^1} \to +\infty$ lorsque $N \to +\infty$. Conclure à l'aide du théorème de Banach-Steinhaus.

2) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $f(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((1+2^{p^3})\frac{|x|}{2}\right)$ pour $|x| \leq \pi$. Suivre Gourdon, Ex. 4 p. 262 pour voir que sa série de Fourier diverge en 0.

Ex. 4 : L'application $\mathfrak{F} : L^1 \to c_0$ n' est pas surjective. On montre ceci avec deux méthodes.

1) On suppose $\mathfrak{F} : L^1 \to c_0$ surjective. Appliquer alors le théorème de l'application ouverte pour montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in \mathcal{C}^0$, $|f|_{\mathcal{C}^0} \leq C|\mathfrak{F}(f)|_{\ell^\infty}$. Utiliser les fonctions D_N pour obtenir une contradiction.

2) Soit $f \in L^1$ telle que $a_n(f) = 0$ pour $n \geq 0$ et $b_n(f) \in \mathbb{R}^+$ pour $n \geq 1$.

a) Vérifier que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ définit un élement de $\mathcal{C}^0$. Utiliser Fubini pour calculer ses coefficients de Fourier $a_n(F)$ et $b_n(F)$.

b) Montrer que les sommes partielles de $\sum_{n\geq 1} a_n(F)$ sont monotones et convergent au sens de Césaro. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(f)}{n} < \infty$.

c) On considère la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sin(nx)}{\ln n} = \sum_{|n|\geq 2} \mathrm{sgn}(n) \frac{e^{inx}}{2i \ln |n|}$. Montrer que cette série n'est pas une série de Fourier. Exhiber alors une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0$ qui n'est pas dans l'image de $\mathfrak{F}$.

3) Soit $(\alpha_j)_{j\geq 0}$ une suite réelle de limite nulle, vérifiant $\forall\ j \geq 1,\ \alpha_{j+1} + \alpha_{j-1} - 2\alpha_j \geq 0$.

a) On pose $\beta_j = \alpha_{j+1} - \alpha_j$. Vérifier que $\sum_{j\geq 1} j\big(\alpha_{j+1} + \alpha_{j-1} - 2\alpha_j\big)$ converge en sommant par parties. En déduire que $f = \sum_{j\geq 1} j\big(\alpha_{j+1} + \alpha_{j-1} - 2\alpha_j\big) F_j$ est absolument convergente dans L^1.

b) Calculer $a_n(F_j)$ en fonction de n et j. En déduire, par une nouvelle sommation par parties, que

$$a_n(f) = 2\sum_{j>n} (j-n)\big(\alpha_{j+1} + \alpha_{j-1} - 2\alpha_j\big) = 2\alpha_n.$$

En déduire que $\mathfrak{F}(f) = (\alpha_{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$.

c) Justifier que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(nx)}{\ln n} = \sum_{|n|\geq 2} \frac{e^{inx}}{2 \ln |n|}$ est la série de Fourier d'une fonction L^1.

Ex. 5 : Un résultat de localisation. Soit $f \in L^1$ telle que f soit nulle p.p. sur $[a,b]$. Soit $[\alpha,\beta] \subset\ ]a,b[$. On veut montrer que $S_N(f) \to 0$ uniformément sur $[\alpha,\beta]$.

1) Montrer qu'on peut se ramener au cas $[-\alpha,\alpha] \subset\ ]-\alpha-\eta, \alpha+\eta[$, avec $0 < \alpha < \alpha+\eta \leq \pi$.

2) Si $\delta > 0$, montrer qu'il existe $f_\delta \in \mathcal{C}^1$ telle que $f_\delta(x) = 0$ si $|x| \leq \alpha$ et $|f - f_\delta|_{L^1} \leq \delta$.

3) Vérifier que l'on a, pour $|x| \leq \alpha$,

$$S_N(f)(x) = \int_{\eta\leq |t|\leq \pi} f(x-t) D_N(t) \frac{dt}{2\pi} \qquad \text{et} \qquad S_N(f_\delta)(x) = \int_{\eta\leq |t|\leq \pi} f_\delta(x-t) D_N(t) \frac{dt}{2\pi}.$$

4) En intégrant par parties, démontrer que $S_N(f_\delta) \to 0$ uniformément sur $[-\alpha,\alpha]$. Justifier en outre que si $|x| \leq \alpha$,

$$\big|S_N(f)(x) - S_N(f_\delta)(x)\big| \leq \frac{\delta}{\sin(\frac{\eta}{2})}.$$

Conlure.

Références :

- *Ex. 3 1)* et *Ex. 4 1)* : W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.* p. 130-133.
- *Ex. 3* : X. Gourdon, *Les maths en tête (Analyse).*
- *Ex. 4 2)* C. Zuily - H. Queffelec, Chap. IV Ex. 17.
- *Ex. 5* M. Schatzman, *Analyse numérique - Une approche mathématique* p. 154.