Approximation polynômiale par morceaux : fonctions splines.

On se donne une subdivision $\sigma = (x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b)$ de $[a,b]$. On appelle spline (cubique) pour la subdivision σ toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, f soit un polynôme de degré ≤ 3 sur $]x_{i-1}, x_i[$. On note $\mathcal{S}_\sigma$ leur ensemble.

Ex. 1 : Splines cubiques

1) Vérifier que $\mathcal{S}_\sigma$ est un sous-espace vectoriel, et préciser sa dimension (on pourra procéder par récurrence).

2) Soit $f \in \mathcal{S}_\sigma$ telle que $f(x_i) = 0$ pour $0 \leq i \leq n$. Etablir que

$$\int_a^b \Big(f''(x)\Big)^2\, dx = f'f''(b) - f'f''(a).$$

On commencera par le cas $n = 1$.

3) *a)* Soit $(y_0, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathcal{A} \equiv \{\ f \in \mathcal{S}_\sigma,\ f(x_i) = y_i \ \ \forall\ 0 \leq i \leq n\ \}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{S}_\sigma$. A l'aide d'une récurrence, déterminer sa dimension.

b) On se donne en outre deux nombres y'_0 et y'_n et les conditions

(a) $f''(a) = f''(b) = 0$;
(b) (avec $y_0 = y_n$) $f(a) = f(b),\ f'(a) = f'(b),\ f''(a) = f''(b)$;
(c) $f'(a) = y'_0,\ \ f'(b) = y'_n$.

Etablir que chacune des conditions (a), (b) ou (c) détermine une et une seule spline $f \in \mathcal{A}$. On fixera $g \in \mathcal{A}$, et on pourra étudier, dans le cas (a), l'application $\mathcal{A} \ni g+\varphi \mapsto (\varphi''(a), \varphi''(b)) \in \mathbb{R}^2$.

4) Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. En suivant **2)**, établir que si $\varphi \in \mathcal{S}_\sigma$ vérifie $\varphi(x_i) = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$ et (a), (b) (avec $f(a) = f(b)$) ou (c) (avec $y'_0 = f'(a)$ et $y'_n = f'(b)$), alors

$$\int_a^b \Big(f'' - \varphi''\Big)^2 dx = \int_a^b \Big(f''\Big)^2 dx - \int_a^b \Big(\varphi''\Big)^2 dx.$$

En déduire par exemple que

$$\min_{f \in \mathcal{A}} \int_a^b \Big(f''\Big)^2 dx$$

est atteint seulement pour l'unique $\varphi \in \mathcal{A}$ vérifiant (a).

Ex. 2 : Convergence des splines

1) Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=f(1)=0$. On note $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ le prolongement impair et 2-périodique de f, et

$$\bar{f}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

son développement en série de Fourier. Démontrer que

$$\int_0^1 \left(f''\right)^2\,dx=\frac{\pi^4}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 n^4.$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, justifier que

$$|f(x)|\le \frac{|f''|_{L^2}}{3\sqrt{5}}.$$

En changeant de variable, en déduire que si $g\in\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ et $g(a)=g(b)=0$, alors

$$|g|_{L^\infty}\le (b-a)^{\frac{3}{2}}\frac{|g''|_{L^2}}{3\sqrt{5}}.$$

2) On se place dans le cadre de la question **4)** de l'Ex. 1, en notant $h=\max_i|x_{i-1}-x_i|$.
a) En appliquant **1)** à $g=f-\varphi$ sur $[x_{i-1},x_i]$, démontrer que

$$|f-\varphi|_{L^\infty([a,b])}\le \frac{h^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{5}}|f''|_{L^2}.$$

b) Démontrer que sur $[x_{i-1},x_i]$, $(f-\varphi)'$ s'annule en au moins un point t_i. En partant de la formule

$$(f-\varphi)(x)=\int_{t_i}^x (f-\varphi)''(t)\,dt,$$

établir alors que

$$|(f-\varphi)'|_{L^\infty([a,b])}\le\sqrt{h}|f''|_{L^2}.$$

Amélioration : Déduire de **1)** que

$$|g|_{L^\infty}\le (b-a)^2\frac{|g''|_{L^\infty}}{3\sqrt{5}}.$$

Améliorer alors **2)** *a)* en montrant qu'en fait

$$|f-\varphi|_{L^\infty([a,b])}\le\frac{h^2}{3\sqrt{5}}|f''|_{L^\infty}.$$

En déduire l'amélioration de **2)** *b)*

$$|(f-\varphi)'|_{L^\infty([a,b])}\le h|f''|_{L^\infty}.$$

Référence :

• A. Chambert-Loir, *Exercices d'Analyse pour l'Agrégation II.* Masson. (Exercice 21-1, 21-2).
• J. Stoer & P. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis,* Springer-Verlag, Chap 2.4.