Théorème de Weierstrass par la convolution.

Théorème de Weierstrass : *Toute fonction continue d'un segment de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de polynômes.*

1) On appelle suite régularisante (ρ_n) toute suite de fonctions (positives) telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)\ dt = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall \alpha > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_{|t| \geq \alpha} \rho_n(t)\ dt = 0.$$

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et à support compact, alors $(f * \rho_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. On utilisera l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\ dt \qquad \text{et} \qquad \rho_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{a_n}(1-t^2)^n & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Justifier que $a_n \geq \frac{1}{n+1}$. Vérifier alors que (ρ_n) est une suite régularisante.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En justifiant que

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \qquad f * \rho_n(x) = \frac{1}{a_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)(1-(x-t)^2)^n\ dt,$$

établir que $f * \rho_n$ est un polynôme de degré au plus $2n$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En déduire que f est limite uniforme sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ d'une suite de polynômes.

3) En déduire le théorème de Weierstrass. Pour $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, on commencera par déterminer (avec un dessin) une extension $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f à support compact, et on effectuera un changement de variables pour se ramener au cas où le support est inclus dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

4) Soit $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact et $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Quel théorème nous permet d'étendre f en $\bar{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue et à support compact ? Proposer alors une démonstration du théorème de Weierstrass dans $\mathbb{R}^N$. On pourra considérer

$$a_n = \int_{B_1(0)} (1-|x|^2)^n\ dx \qquad \text{et} \qquad \rho_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{a_n}(1-|x|^2)^n & \text{si } |x| \leq 1. \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

5) Soit $f : \bar{D}_1(0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue. Que penser de f si f est limite uniforme sur $\bar{D}_1(0)$ d'une suite de polynômes *complexes* ?

Exercice :

1) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b t^n f(t)\ dt = 0.$$

Montrer que $f \equiv 0$.

2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On suppose que qu'il existe $\sigma \geq 0$ tel que pour $s > \sigma$,

$$F(s) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\ dt = 0$$

(vérifier que l'intégrale est bien définie). Démontrer que $f \equiv 0$. On pourra utiliser la variable $u = e^{-t}$. Montrer que le résultat reste vrai si l'on suppose seulement qu'il existe $\sigma \geq 0$ vérifiant $F(\sigma + n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Référence :

• X. Gourdon, *Les maths en tête (Analyse).* Ellipses. p. 279.