Université de Nice-Sophia Antipolis
Agrégation de mathématiques
2006/2007

Suites récurrentes

Exercice 1: Convergence/divergence de la suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$ pour $n \in \mathbb{N}$, avec $a, b, u_0 \in \mathbb{R}$ fixés.

Exercice 2: Convergence/divergence de la suite $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2 - u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $u_0 = 0$.

Exercice 3: Soient $a, b \geq 0$ et les suites $(u_n), (v_n)$ définies par récurrence par $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $u_0 = a$, $v_0 = b$. Convergence et limite éventuelles des (u_n) et (v_n)?

Exercice 4: Développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 5: Soit $f \in C^0([0,1],[0,1])$ telle que $0 < f(x) < x$ pour tout $x \in]0,1]$ et telle que $f(x) = x - ax^2 + bx^3 + o(x^3)$ lorsque $x \to 0$, avec $a > 0$ et $b \neq a^2$. Donnez un développement asymptotique de la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in [0,1]$.

Exercice 6: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.

(a) On suppose que $|f'(a)| < 1$. Montrez qu'il existe $\delta > 0$ tel que si il existe n_0 tel que $u_{n_0} \in B(a, \delta)$, alors (u_n) converge vers a.

(b) On suppose que $|f'(a)| > 1$. Montrez que (u_n) convereg vers a si et seulement si (u_n) stationne en a.

Exercice 7: Convergence/divergence de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{1}{1 + 2\sqrt{u_n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 > 0$.