

## Interpolation polynomiale — Correction des exercices

**Exercice 1** - On doit résoudre le système linéaire à  $n + 1$  équations :

$$\left\{ \sum_{j=0}^n a_j x_i^j = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n \right\}.$$

Son déterminant est le déterminant de Vandermonde :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

On sait que  $\Delta = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$  donc  $\Delta$  est non nul puisque les  $x_i$  sont distincts. Ainsi le système a une solution unique.

**Exercice 2** - Les premières assertions sont claires. On en déduit aisément que la famille est libre, donc forme une base. En décomposant  $p_n = \alpha_0 \ell_0 + \dots + \alpha_n \ell_n$  et en évaluant en  $x_i$  on obtient  $\alpha_i = f(x_i)$ .

**Exercice 3** -

1. Le polynôme  $p_k - p_{k-1}$  est de degré  $k$  et s'annule en  $x_0, \dots, x_{k-1}$ . Avec  $p_0(x) = f(x_0)$  on déduit la formule.
2. On évalue  $(x-x_0)q_{k-1}(x) - (x-x_k)p_{k-1}(x)$  en  $x_i$  : on trouve  $(x_k-x_0)f(x_i)$  pour tout  $i = 0, \dots, k$ . On conclut par unicité du polynôme d'interpolation.
3. On range les valeurs  $f(x_i)$  dans un tableau  $T$ . A l'étape 1 on fait  $T[i] = \frac{T[i]-T[i-1]}{x_i-x_{i-1}}$  en partant de  $i = n$  jusqu'à  $i = 1$ . A l'étape 2 on fait  $T[i] = \frac{T[i]-T[i-1]}{x_i-x_{i-2}}$  en partant de  $i = n$  jusqu'à  $i = 2$ , et ainsi de suite. Au bout de  $n$  étapes,  $T[i]$  contient la valeur de  $f[x_0, \dots, x_i]$ .
4. La factorisation est claire. Le calcul de  $p_n$  se fait par récurrence descendante :

$$\begin{aligned} u_n &= f[x_0, \dots, x_n] \\ u_k &= f[x_0, \dots, x_k] + (x - x_k)u_{k+1}, \quad 0 \leq k < n. \end{aligned}$$

Alors  $u_0 = p_n(x)$ .

5. Si l'on rajoute  $x_{n+1}$  il y a seulement  $n + 1$  calculs à faire pour calculer  $T[n + 1]$ .

**Exercice 4** -

1. Si  $x = x_i$ , alors  $E_n(f)(x_i) = 0$  et  $\pi_{n+1}(x_i) = 0$  donc le résultat est vrai.
2. Remarquer que  $q_{n+1}(x_i) = f(x_i)$  et  $q_{n+1}(x) = f(x)$ .
3. La fonction  $F(t)$  s'annule  $(n+2)$  fois dans l'intervalle donné. D'après le théorème de Rolle itéré, il existe  $\xi_x$  dans l'intervalle ouvert tel que  $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$ . Ceci conclut.
4. Clair.
5. On a  $\|f^{(n+1)}\| = \exp(b)$  et  $\|\pi_{n+1}\| \leq (b-a)^{n+1}$  donc  $\|E_n\| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \exp(b) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .