Exemples de variables aléatoires et de fonctions caractéristiques

1 Loi triangulaire

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme $\mathcal{U}(]-1,1[)$. Calculer la loi de $S := X + Y$ et $S/2$.

2 Statistiques d'ordre

Sur un espace probabilisé $(\omega, \mathcal{T}, P)$, on considère n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ de même densié f, de fonction de répartition F.

1. Si $i \neq j$ montrez que $P(X_i = X_j) = 0$.
2. Plus généralement soit U l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que les nombres réels $X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)$ sont deux à deux distincts, montrez que $P(U) = 1$.
3. Soient $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \cdots, n\}$, et $\sigma : U \to \mathcal{S}_n$ tel que $X_{\sigma(\omega)[1]}(\omega) < X_{\sigma(\omega)[2]}(\omega) < \cdots < X_{\sigma(\omega)[n]}(\omega)$. On notera $X_{(i)}(\omega) := X_{\sigma(\omega)[i]}(\omega)$. Donner la loi de σ, puis calculer pour chaque i, k, $P(\sigma[i] = k)$.
4. Vérifier que le n-échantillon réordonné $(X_{(1)}, \cdots, X_{(n)})$ admet comme densité : $n! f(x_1) \cdots f(x_n) \chi_C(x_1, \cdots x_n)$ où $C := \{x_1 < \cdots < x_n\}$.
5. En utilisant la densité précédente vérifier que $F_{X_{(n)}}(x) = [F(x)]^n$, $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$, $F_{X_{(i)}}(x) = i\binom{n}{i}[F(x)]^{i-1}[1 - (1 - F(x)]^{n-i}$ pour $1 < i < n$.

3 Fonctions caractéristiques de lois usuelles

1. Déterminer la fonction caractéristique $\varphi_X(t) := E[\exp(\iota t X)]$ $(\iota^2 = -1)$, de la v.a. X dans les cas suivants : X est constante : $X = \mu$, X est discrète : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $P(X = k) = p_k$, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. $X \sim \mathcal{U}(]-a, a[)$ avec $a > 0$.
2. Retrouver que si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$, $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. De même si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1,)$, $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
3. Démontrer que si $np_n \to \lambda$ quand $n \to +\infty$, et si $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n))$ alors (X_n) converge en loi vers une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

4 Loi faible des grands nombres

Soient X une v.a. de moyenne μ et d'écart type σ, et (X_n) une suite de v.a. indépendantes de même loi que X.

1. Montrez que que $\varphi_X(t) := E[\exp(\iota t X)] \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ avec $\iota^2 = -1$.
2. Vérifier que $\varphi_X(t) = 1 + \iota\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \mathrm{o}(t^2)$ en 0.
3. Soit $nS_n := X_1 + \cdots + X_n$. Calculer $\varphi_{S_n}(t)$ puis montrer qu'elle converge simplement vers $\exp(\iota t \mu)$. Conclure.