## Homographies de la droite projective

On désigne par K un corps commutatif.

1) Quelles sont les homographies de $\mathbb{P}^1$ qui préservent $\infty$ ? 0 et $\infty$ ? Montrer que le sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{K})$ formé des homographies qui préservent deux points distincts $p$ et $q$ est isomorphe à $\mathrm{K}^*$ .

2) Soit D une droite projective.

a) Pour qu'une homographie $h$ de D soit une involution (i.e. $h^2 = \mathrm{Id}$ , $h \neq Id$ ), il faut et il suffit qu'il existe deux points distincts $p$ et $q$ de D tels que $h(p) = q$ , $h(q) = p$ .

b) Soient $p, q, p', q'$ quatre points distincts de D . Montrer qu'il existe une unique involution $h$ de D qui envoie $p$ sur $p'$ et $q$ sur $q'$ (appliquer a) à l'homographie qui envoie $p$ sur $p'$ , $q$ sur $q'$ et $p'$ sur $p$ ).

3) a) Montrer qu'une homographie de $\mathbb{P}^1(\mathrm{K})$ a 0,1 ou 2 points fixes. Si l'on choisit l'un des points fixes comme point à l'infini, quelles sont les formes possibles pour $h$ ?

b) Soient $h, g$ deux homographies ayant 2 points fixes distincts. Si ces points fixes sont les mêmes, montrer que $h$ et $g$ commutent.

c) On suppose que $h$ et $g$ commutent. Montrer que ou bien $h$ et $g$ ont les mêmes points fixes, ou bien on a dans un repère convenable $h(z) = -z$ et $g(z) = 1/z$ .

4) a) Soient $\alpha, \beta$ des éléments distincts de $\mathrm{K}^*$ . Calculer le birapport $(\infty, 0, \alpha, \beta)$ .

b) Soient $a, b; p, q, r$ 5 points distincts d'une droite projective. Démontrer (sans calculs) la formule $(a, b, p, q)\,(a, b, q, r)\,(a, b, r, p) = 1$ .

5) a) Dans le plan complexe, montrer que les similitudes directes sont les transformations $z \mapsto az + b$ , pour $a \in \mathbb{C}^*$ , $b \in \mathbb{C}$ .

b) Montrer que le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes (directes) et la transformation $z \mapsto 1/z$ .

c) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des droites et des cercles du plan complexe. Montrer que les éléments de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ préservent $\mathcal{P}$ .

d) Soient $a, b, c, d$ quatre points distincts du plan complexe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) Les points $a, b, c, d$ sont alignés ou situés sur un cercle;

(ii) Le birapport $[a, b, c, d]$ est réel.

6) a) Dans le plan complexe, montrer que l'inversion de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rapport $k$ est une anti-homographie (c'est-à-dire de la forme $z \mapsto \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ ). Donner la formule explicite.

b) Montrer (sans aucun calcul) que toute anti-homographie est composée d'une inversion et d'une similitude (observer que les similitudes fixent le point à l'infini).

c) Montrer que les anti-homographies préservent l'ensemble $\mathcal{P}$ de l'exercice 5 c).

7) Soit $h$ une anti-homographie de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Montrer que l'ensemble des points fixes de $h$ est ou bien un ensemble fini de cardinal $\leq 2$, ou bien une droite (réelle), ou bien un cercle. Dans le dernier cas $h$ est une inversion, dans le deuxième une symétrie par rapport à la droite fixe (considérer le composé de $h$ avec une inversion ou symétrie convenable).

8) Soit $h$ une anti-homographie de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ telle que $h^2 = \mathrm{Id}$. Prouver que $h$ est une inversion ou une symétrie par rapport à une droite (réelle).

(Si $h(\infty) = \infty$, montrer que $h(z) = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$ ; si $h(\infty) = a \in \mathbf{C}$, montrer qu'on a $h(z) - a = k/(\bar{z} - \bar{a})$, avec $k \in \mathbf{R}$.)