Exercices de géométrie projective

On désigne par K un corps commutatif, et par P un plan projectif sur K.

1) Soit (a, b, c, d) un repère projectif de P.

a) Expliquer ce qu'est le système de coordonnées homogènes défini par ce repère. Calculer (dans ce système) les coordonnées des points $e = ab \cap cd$, $f = ac \cap bd$, $g = ad \cap bc$. A quelle condition sur le corps K ces points sont-ils alignés? On suppose désormais que ce n'est pas le cas.

b) Soit $h = eg \cap ac$. Montrer que les points f et $h = eg \cap ac$ sont conjugués harmoniques (sur ac) par rapport à a et c.

c) Donner l'énoncé dual, et le comparer à l'énoncé original.

d) Démontrer b) sans calculs, en prenant bd comme droite à l'infini.

2) Soit o un point de P, ℓ_i $(i = 1, 2, 3)$ 3 droites distinctes passant par o, d et d' deux droites distinctes ne passant pas par o. On pose $p_i = d \cap \ell_i$ et $p'_i = d' \cap \ell_i$, $a = \langle p_1, p'_2 \rangle \cap \langle p'_1, p_2 \rangle$, $b = \langle p_2, p'_3 \rangle \cap \langle p'_2, p_3 \rangle$, $c = d \cap d'$. Montrer que a, b, c sont alignés (choisir une droite à l'infini convenable).

3) Soient d, d' deux droites distinctes de P, o leur point d'intersection.

a) Soit $p \in \mathrm{P} - \{d \cup d'\}$, et soit $h : d \to d'$ l'application qui associe à $m \in d$ le point $d' \cap pm$. Montrer que h est une homographie.

b) Montrer que toute homographie $h : d \to d'$ telle que $h(o) = o$ est de cette forme; autrement dit, les droites $\langle m, h(m) \rangle$ passent toutes par un même point p de $\mathrm{P} - \{d \cup d'\}$.

c)* Donner les énoncés duaux en termes de faisceaux de droites.

4) On suppose le corps K de caractéristique $\neq 2$. Soit $h : \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ une involution (application projective telle que $h^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{P}}$, $h \neq \mathrm{Id}_{\mathrm{P}}$).

a) Montrer que l'ensemble des points fixes de h est la réunion d'une droite d et d'un point $p \notin d$.

b) Soit $m \in \mathrm{P}$, $m \notin d$, $m \neq p$. Montrer que la droite pm est stable par h (observer que son image est une droite). Soit $m' = d \cap pm$; montrer que $h(m)$ est le conjugué harmonique de m par rapport à p et m' (sur la droite pm).

c) On prend d comme droite de l'infini, de sorte que $\mathrm{P} - d$ s'identifie à un espace affine; montrer que h restreinte à $\mathrm{P} - d$ est la symétrie par rapport à p.