# THEOREME TAUBERIEN DE HARDY-LITTLEWOOD.

*Nous ne corrigerons en Td que l'ex. 2, éventuellement* 3.

On se donne une série réelle (ou complexe) $\sum_{n\geq 0} a_n$, et la série entière associée $f(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, supposée de rayon $R \geq 1$. Si la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, le théorème d'Abel (voir TD-Dvlpt) affirme que $f(x) \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si $x \to 1$, $x \in ]0,1[$. La réciproque

*si* $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ *existe, alors* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

de ce théorème est fausse en géneral : $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \to \frac{1}{2}$ quand $x \to 1^-$ mais $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ diverge. Mais elle peut être vraie sous certaines hypothèses sur $(a_n)$.

**Ex. 1 : Théorème taubérien faible**. On suppose ici que

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{quand} \ \ n \to +\infty,$$

*i.e.* $M_n \equiv \sup_{k>n} |ka_k| \to 0$ quand $n \to +\infty$. Rappeler pourquoi, pour $0 < x < 1$, on a $1 - x^k \leq k(1-x)$. Vérifier alors les inégalités suivantes, pour $0 < x < 1$.

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x)\Big| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1-x^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x^k \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{M_n}{n}\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k.$$

Prendre alors $x = 1 - \frac{1}{n}$ et conclure à l'aide du lemme de Césaro.

**Ex. 2 : DVLPT - Théorème taubérien fort**. On suppose ici seulement que

$$a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{quand} \ \ n \to +\infty.$$

**1)** En retranchant une constante à $a_0$, montrer qu'il suffit de considérer le cas où $f(x) \to 0$ quand $x \to 1^-$, ce que l'on suppose dans la suite.

On définit $\Phi$ comme l'ensemble des fonctions $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que

$(i)$ $\forall x \in [0,1[$, $\sum_{n\geq 0} a_n \varphi(x^n)$ converge; $\qquad (ii)$ $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n) = 0$,

et on note $g$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.

**2)** Montrer que $g$ vérifie $(i)$, et que si $g \in \Phi$, alors le résultat est démontré.

**3)** Etablir que tout polynôme $p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $p(0) = 0$ appartient à $\Phi$.

**4)** Etant donné $q \in \mathbb{R}[X]$, démontrer l'égalité

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = \int_0^1 q(t)\ dt.$$

**5)** On se fixe $\varepsilon > 0$.

*a)* Dessiner la fonction $h(x) = \dfrac{g(x)-x}{x(1-x)}$ sur $[0,1]$, prolongée par continuité en 0 et 1. En déduire l'existence de deux fonctions continues $s_1$ et $s_2$ telles que $s_1 \le h \le s_2$ et $\int_0^1 s_2 - s_1 \le \varepsilon$.

*b)* En utilisant le théorème de Weierstrass, justifier l'existence de deux polynômes $t_1$ et $t_2$ tels que $|t_1 - s_1| \le \varepsilon$ et $|t_2 - s_2| \le \varepsilon$ sur $[0,1]$, puis de deux polynômes $u_1$ et $u_2$ tels que $u_1 \le s_1 \le h \le s_2 \le u_2$ et $|u_2 - u_1| \le 3\varepsilon$ sur $[0,1]$.

*c)* Justifier alors que les polynômes $p_1(x) = x + x(1-x)u_1(x)$ et $p_2(x) = x + x(1-x)u_2(x)$ vérifient

$$p_1(0) = p_2(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad p_1(1) = p_2(1) = 1,$$

$$p_1 \le g \le p_2 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 q(x)\ dx \le 3\varepsilon, \quad \text{avec} \quad q(x) \equiv \frac{p_2(x)-p_1(x)}{x(1-x)} \in \mathbb{R}[X].$$

**6)** Soit $M \equiv \sup_{n\ge 1} |na_n|$. En utilisant $1 - x^n \le n(1-x)$, justifier que, pour $0 \le x < 1$,

$$\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\Big| \le M\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}(1-x^n)q(x^n) \le M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n).$$

Démontrer alors que $g \in \Phi$ et conclure.

**Ex. 3 : Théorème taubérien pour les transformées de Laplace.** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ localement intégrable et $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\ f(t)\ dt$ sa transformée de Laplace. Il est connu que si $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge, alors $F$ est définie et continue pour $s \ge 0$. La réciproque est fausse (voir $f(t) = e^{it}$), mais si $f(t) = \mathcal{O}(\frac{1}{t})$ quand $t \to +\infty$, elle est vraie. On suppose donc qu'il existe $T \ge 0$, $M \ge 0$ tels que $|f(t)| \le \frac{M}{t}$ pour $t \ge T$. Alors $F$ est bien définie pour $s > 0$, et on suppose que $F$ a une limite en $0^+$.

**1)** Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et les polynômes $p_1$, $p_2$ et $q$ de l'ex. 2. Majorer comme au **6)**

$$\Big|\int_T^{+\infty} f(t)g(e^{-st})\ dt - \int_T^{+\infty} f(t)p_1(e^{-st})\ dt\Big| \le M\int_T^{+\infty} q(e^{-st})e^{-st}\frac{1-e^{-st}}{t}\ dt \le K\int_0^1 q(u)\ du.$$

**2)** Par convergence dominée, montrer que si $s \to 0$,

$$\Big|\int_0^T f(t)g(e^{-st})\ dt - \int_0^T f(t)p_1(e^{-st})\ dt\Big| \to 0.$$

Conclure que $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut $\lim_{s\to 0^+} F(s)$.

**Références :**

• A. Chambert-Loir *Exercices d'Analyse pour l'Agrégation I.* Masson. (Exercice 6.3, questions 3 et 4).

• X. Gourdon *Les Maths en tête - Analyse.* Ellipses (Ex. 11 p. 251 et Pb. 20 p. 284).