Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

TD, Année 2006-2007

Applications des séries entières.

Toutes ces applications sont à mettre dans les leçons correspondantes. On peut aussi s'en servir pour faire un développement.

Exercice 1 (Calcul des sommes, d'intégrales et de suites)

1) Calculer $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$ en fonction de $\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,dt$. (Cette dernière intégrale peut ensuite se calculer en faisant une décomposition en éléments simples).

2) Calculer $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x+\cdots+x^n)}{x}\,dx$. (On utilisera le développement en série entière de $\ln(1-u)$.)

3) On définit par récurrence la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n} a_k\,a_{n-k}$ avec $a_0=1$.

a) On pose $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Etablir un lien entre $f^2(z)$ et $f(z)$.

b) En déduire que $f(z)=\dfrac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$.

c) En utilisant un développement en série entière, conclure à la valeur des a_n.

4) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(5n)!}$.

Exercice 2 (Autres applications classiques : Equations différentielles et Dénombrement)

1) a) Trouver les solutions développables en séries entières de $xy''+2y'+\omega^2xy=0$.

b) Trouver toutes les solutions de cette équation différentielle sur $]0,+\infty[$, puis sur $]-\infty,0[$ et finalement sur $\mathbb{R}$.

2) On cherche à résoudre l'équation de Bessel $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$.

On cherche une solution sous la forme $x^\lambda\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0\neq 0$.

a) Montrer que $2[(n+\lambda)-\nu]a_n+a_{n-2}=0$ pour $n\geq 2$.

b) Dans le cas $\lambda=\nu$, calculer les a_n. Traiter les autres cas de figure.

3) On rappelle qu'une involution est une permutation s telle que $s^2=Id$. On note I_n le nombre d'involution sur $\{1,\cdots,n\}$.
a) Montrer que $I_{n+1}=I_n+nI_{n-1}$.

b) On pose $f(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{I_n}{n!}x^n$. Montrer que $f'(x)=1+x+f(x)+xf(x)$. Exprimer I_n en fonction des coefficients a_n du développement en série entière en 0 de $g(x)=e^{x+x^2/2}\int_0^x(1+u)e^{-u-u^2/2}\,du$.

4) Soit $n\in\mathbb{N}$. On cherche à calculer a_n le cardinal de l'ensemble $\{(u,v)\in\mathbb{N}^2\,;\,2u+3v=n\}$.

a) Montrer que $\sum a_nx^n$ s'obtient en effectuant le produit de deux séries entières simples.

b) Développer $\dfrac{1}{1-z^2}\dfrac{1}{1-z^3}$ en éléments simple et conclure.

Bibliographie : Leichtnam-Schauer (ex 1.3, 2.1 et 2.3), Precis Analyse Tome 7 (ex 1.1, 1.2 et 1.3), Pommellet (ex 2.2), Francinou Analyse 2 (ex 1.4)