Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
TD, Année 2006-2007
Compléments et révisions.

Exercice 1 (Pôles et résidus)

1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in H(\Omega \subset \{a\})$.

a) Si $f = g/h$ avec $g, h \in H(\Omega)$, $g(a) \neq 0$ et a zéro simple de h, alors $\operatorname{Res}(f, a) = \dfrac{g(a)}{h'(a)}$.

b) Si $f(z) = g(z)/(z-a)^n$ avec $g \in H(\Omega)$, $g(a) \neq 0$, alors $\operatorname{Res}(f, a) = \dfrac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$.

c) Calculer les résidus aux pôles de $f(z) = \dfrac{z^2 + z + 1}{z(z^2+1)^2}$.

2) Soit $f(z) = \dfrac{2}{4z - z^2 - 1}$. Calculer les résidus de f. Calculer de deux façons $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$ avec $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ pour en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos t}\, dt$.

3) Calculer $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n}\, dt$ en utilisant le lacet réunion de $[0, R]$, Re^{it} pour tout $t \in [0, 2\pi/n]$ et $te^{i2\pi/n}$ pour $t \in [R, 0]$.

Exercice 2 (Holomorphe divers : CVU, Développements de Laurent)

1) Soit $f_n, f \in H(\mathbb{C})$. Montrer que si f_n CVU vers f sur tous les boules fermées de centre 0, alors f_n' CVU vers f' sur toutes les boules fermées de centre 0.

2) Donner le développement de Laurent de la fonction $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2} + \dfrac{1}{3-z}$ sur $D(0,1)$, sur $C_1 = \{1 < |z| < 3\}$ et $C_2 = \{3 < |z|\}$, puis de $g(z) = \dfrac{1}{1-z} e^{1/z}$ sur $C_3 = \{1 < |z|\}$ et $C_4 = \{0 < |z| < 1\}$.

3) Montrer que $f(z) = \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + z^{2^n})$ CVN sur tout compact de $D(0,1)$ et vaut $\dfrac{1}{1-z}$.

Exercice 3 (Intégrabilité, Limites : des exemples à savoir faire !)

1) Soit $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, $h \in L^\infty(\mathbb{T})$. On pose $f \bullet g(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{T}} f(t-s)\, g(s)\, [h(s) + h(t-s)]\, ds$.

a) Montrer que $f \bullet g$ est mesurable et dans $L^1(\mathbb{T})$. Majorer $\|f \bullet g\|_1$ en fonction de $\|f\|_1$, $\|g\|_1$ et $\|h\|_\infty$.

b) Montrer la relation suivante entre les coefficients de Fourier : $c_n(f \bullet g) = c_n(fh)c_n(g) + c_n(gh)c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

c) Si on suppose que $f \in L^2(\mathbb{T})$ au lieu de $L^1(\mathbb{T})$, montrer que $f \bullet g$ est mesurable et dans $L^2(\mathbb{T})$. Montrer que $\|f \bullet g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_1 \|h\|_\infty$.

2) Etudier la limite quand $n \to +\infty$ de $I_n(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x/n^2}\, dx$.

3) Etudier la limite quand $x \to 0$ de $S_n(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2 + x}{n^2 x + x^3}$.

4) Calculer $F(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(yx) \frac{e^{-x}}{x}\, dx$ pour $y \in \mathbb{R}$.

Bibliographie : Tauvel, exercices d'analyse complexe (ex 1 et 2)