

Exercice 1 (Propriétés ultra-basiques)

Montrer les propriétés suivantes :

- 1) Une suite de Cauchy est bornée.
- 2) Une suite de Cauchy avec un point d'accumulation a est convergente (vers a).
- 3) Tout espace métrique compact est complet.
- 4) Tout e.v.n. de dimension fini est complet.
- 5) Un complet d'un espace métrique est fermé.
- 6) Un s.e.v. de dimension finie d'un e.v.n. est fermé.
- 7) Si (E_1, d_1) et (E_2, d_2) sont complet, alors $(E_1 \times E_2, d)$ est complet avec $d =$ (au lecteur de compléter).

Exercice 2 (Notion métrique)

En étudiant $d(x, y) = |\text{Arctan}x - \text{Arctan}y|$ sur \mathbb{R} , montrer que la notion d'espace complet est métrique et non topologique.

Exercice 3 (Exemples du cours)

1) Soit X un ensemble. On pose $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ l'e.v. des fonctions bornées de X dans \mathbb{C} . On le muni de $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$. Montrer que cela en fait un espace complet.

2) Montrer que $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ (e.v. des suites complexes qui tendent vers 0) muni de la norme infinie est complet.

3) Montrer que $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ muni de $\|(u_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_2 = \sqrt{\sum_0^{+\infty} |u_k|^2}$ est complet.

4) Montrer que $L_c(E, F)$, avec E e.v.n. et F un Banach, muni de la norme d'opérateur classique est complet.

Exercice 4 (Quelques propriétés des espaces complets)

1) Soit (E, d) un espace complet et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides telle que $\text{diam}(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors il existe $x \in E$ telle que $\cap F_n = \{x\}$.

2) Soit E un e.v.n. Montrer que E est complet si et seulement si pour tout $\sum \|u_n\|$ convergente, on a $\sum u_n$ converge.

3) Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable avec une dérivée bornée, alors f se prolonge continuellement sur $[a, b]$.

Exercice 5 (Distance qui rend complet les fonctions C^∞)

Pour $f, g \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, on pose $d(f, g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty}{1 + \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty}$.

1) Montrer que d est bien une distance sur $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$.

2) Montrer que $(C^\infty([a, b], \mathbb{R}), d)$ est complet.