**Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,**

*TD, Année 2006-2007*

**Mesures.**

## Exercice 1 (Boréliens et homothétie)

Soit $A$ un borélien de $\mathbb{R}^N$. On note $H$ l'homothétie de centre 0 et de rapport $k > 0$. Calculer la mesure de Lebesgue de $H(A)$ en fonction de celle de $A$.

## Exercice 2 (Extrait Agreg 2005)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\delta(x) = \inf\{|x - n| \,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ sa distance à $\mathbb{Z}$. On admet avoir montré que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $n$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq q \leq n$ et $\delta(qt) \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Soit $\alpha \geq 0$. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_\alpha(q) = \{t \in \mathbb{R} \,;\, \delta(qt) < q^{-\alpha}\}$ et $Y_\alpha = \limsup_{q\to\infty} U_\alpha(q)$ l'ensemble des $t$ qui appartiennent à une infinité de $U_\alpha(q)$.

a) Montrer que $Y_1 = \mathbb{R}$.

b) Calculer la mesure de Lebesgue de $U_\alpha(q) \cap [0, 1]$.

c) Montrer que pour $\alpha > 1$, l'ensemble $Y_\alpha$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En déduire que $Y = \cup_{\alpha>1} Y_\alpha$ est aussi de mesure nulle.

## Exercice 3 (Utilisation d'ensembles)

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions de $L^1$ telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_k| < +\infty$. Montrer qu'alors $f_n \to 0$ p.p. (On montrera que $A_n = \cap_{i=1}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} \,;\, \exists k \geq i, |f_k(x)| \geq \dfrac{1}{n}\}$ est de mesure nulle.)

## Exercice 4 (Cantor)

1) Montrer que l'ensemble de Cantor est compact, de mesure nulle et d'intérieur vide.

2) A partir de l'ensemble de Cantor, construire une fonction $f$ dont la dérivée est nulle presque partout sur $[0, 1]$ et pour laquelle on n'a pas $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, dt$.

3) Rappeler des énoncés liés à cette dernière égalité.

Bibliographie : Buchwalter (ex 1), Chambert-Loir (ex 3), Rudin (ex 4)