Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
TD, Année 2006-2007
Probabilités.

Exercice 1 (Loi forte des grands nombres, Th de Cantelli)

1) Soient $X_1, X_2, ...$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi telles que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^4) < +\infty$. Montrer que $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to 0$ p.s. sans utiliser la loi forte des grands nombres. (Penser à Markov et Borel-Cantelli et étudier $\mathbb{P}(|S_n/n| \geq \varepsilon)$.)

2) Montrer que si les v.a.r. X_n ne sont plus de même loi, mais que $\mathbb{E}(X_n^4)$ est borné, le résultat est vrai.

Exercice 2 (Convergence des fonctions de répartitions)

Soient X_n et X des v.a.r., F_n et F leurs fonctions de répartition, Donner des exemples correspondant aux cas suivants :

1) Si $X_n \to X$ en loi et si x est un point de discontinuité de F, alors $F_n(x)$ ne tend pas nécessairement vers $F(x)$.

2) Une suite F_n de fonctions de répartition ne tend pas nécessairement vers une fonction de répartition.

Exercice 3 (Probabilité d'un intervalle)

Soient deux suites réelles (a_n) et (b_n) de limite respectives a et b avec $a \leq b$. Soit (X_n) une suite de v.a.r. (de fonctions de répartition F_n) qui converge en loi vers une v.a.r. dont la fonction de répartition F est continue. Montrer que $\mathbb{P}(X_n \in [a_n, b_n]) \to P(X \in [a, b])$.

Exercice 4 (Processus de Poisson)

On s'intéresse à la modélisation probabiliste d'un problème concernant l'arrivée de messages vers un réseau informatique. On désigne par T_1 le temps d'attente pour le réseau d'un premier message à partir de l'instant initial $t = 0$ et, pour tout entier $k \geq 2$ par T_k le temps d'attente du k-ième message à partir de l'arrivée du $(k-1)$-ième. On suppose que les T_k sont des v.a.r. suivant une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et que pour $n \geq 2$, les v.a. $T_1, \cdots, T_n$ sont indépendantes. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$. On note $f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $f^{*1} = f_\lambda$ et $f^{*(n+1)} = f^{*n} * f_\lambda$ avec $f * g(x) = \int_0^x f(x-t) g(t)\, dt$.

1) Calculer f^{*n}.

2) Calculer $F_{S_n}(x) = \mathbb{P}(S_n \leq x)$.

3) Donner une interprétation de S_n.

4) Calculer la probabilité pour qu'aucun message ne soit arrivé entre les instants 0 et t.

5) Calculer la probabilité pour qu'au plus un message soit arrivé entre les instants 0 et t.

6) Calculer la probabilité pour qu'au plus n messages soient arrivés entre les instants 0 et t.

7) Calculer la probabilité pour qu'exactement n messages soient arrivés entre les instants 0 et t.

8) Quelle est la loi de probabilité de la v.a. N_t indiquant le nombre de messages reçus entre les instants 0 et t.

Bibliographie : Cottrell (ex 1, 2, 3).