Les théorèmes principaux sur les Séries de Fourier.

Notations. On ne manipule que des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui soient 2π-périodiques. En particulier, $f \in \mathcal{C}^p$ ou L^p signifie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est 2π-périodique et est de classe $\mathcal{C}^p$ ou est dans $L^p([0, 2\pi], \frac{dx}{2\pi})$. Les normes sont calculées sur une période, et la norme L^p pour la mesure $\frac{dx}{2\pi}$.

Si $f \in L^1$, ses coefficients de Fourier sont définis par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt, \quad n \geq 0, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt, \quad n \geq 1.$$

Ces coefficients sont liés par

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad n \geq 0, \qquad b_n(f) = i\big(c_n(f) + c_{-n}(f)\big), \quad n \geq 1,$$

de sorte que

$$c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2}, \qquad c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx} = a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx), \quad n \geq 1.$$

La série de Fourier de f est alors la suite $(S_N(f))_{N \geq 0}$, définie de façon équivalente par

$$\sum_{|n| \leq N} c_n(f) e^{inx} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{1 \leq n \leq N} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx).$$

On notera que la première est une somme partielle *symétrique.*

On note $e_n(x) = e^{inx}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de L^2 donné par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, \frac{dt}{2\pi}.$$

Les familles $\big(e_n\big)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\big(1, \sqrt{2}\cos(nx), \sqrt{2}\sin(nx),\ n \geq 1\big)$ sont orthonormées dans L^2, donc libres.

Lorsque ceci est défini, on pose

$$f * g(x) = \int_0^{2\pi} f(t) g(x-t)\, \frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t)\, \frac{dt}{2\pi}.$$

Par exemple, si $f \in \mathcal{C}^p$ et $g \in L^1$, on a $f * g \in \mathcal{C}^p$ et $|f * g|_{\mathcal{C}^0} \leq |f|_{\mathcal{C}^0} |g|_{L^1}$. Si $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p$ et $g \in L^1$, alors $f * g \in L^p$ et on a $|f * g|_{L^p} \leq |f|_{L^p} |g|_{L^1}$.

On appelle *polynôme trigonométrique* de degré $N \in \mathbb{N}$ une fonction du type

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

avec $a_n,\ b_n,\ c_n \in \mathbb{C}$, et $|c_N|^2 + |c_{-N}|^2 > 0$ ou $|a_N|^2 + |b_N|^2 > 0$. L'ensemble des polynômes trigonométriques est noté $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(e_n,\ n \in \mathbb{Z}) = \mathrm{Vect}(1, \cos(nx), \sin(nx),\ n \in \mathbb{N}^*) \subset \mathcal{C}^0$

I - Régularité et décroissance des coefficients de Fourier.

• Si $f \in \mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$, on a pour $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f^{(p)}) = (in)^p c_n(f).$$

Si $f \in \mathcal{C}^1$, on a pour $n \geq 1$, $\qquad a_n(f') = nb_n(f), \quad b_n(f') = -na_n(f).$

• *Lemme de Riemann-Lebesgue* [ZQ] : Si $f \in L^1$, alors

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt \to 0 \qquad \text{quand} \qquad \lambda \to \pm\infty.$$

En particulier, si $f \in L^1$, alors $c_n(f) \to 0$ quand $n \to \pm\infty$, et $a_n(f)$, $b_n(f) \to 0$ si $n \to +\infty$. Si $f \in \mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$, alors $c_n(f) = o\big(\frac{1}{n^p}\big)$ quand $n \to \pm\infty$.

On définit [R] alors $c_0 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}},\ \lim\limits_{|n|\to+\infty} u_n = 0\}$, muni de la norme $|u|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$, et

$$\mathfrak{F} : L^1 \to c_0 \qquad \mathfrak{F}(f) = \big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

L'application $\mathfrak{F}$ est linéaire sur $\mathbb{C}$, continue et de norme 1.

II - Convergence simple / uniforme.

Le noyau de Dirichlet. [ZQ] On appelle noyau de Dirichlet la quantité :

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e_n(x) = \frac{\sin\big((N+\frac{1}{2})x\big)}{\sin\big(\frac{x}{2}\big)}.$$

Ainsi, lorsque $f \in L^1$, on a :

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx} = f * D_N(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)D_N(t)\,\frac{dt}{2\pi}.$$

• *Théorème de Dirichlet.* [ZQ] Soit $f \in L^1$, et $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mu = \frac{1}{2}\lim_{t\to0^+} f(x+t) + f(x-t)$ existe. On suppose que

$$t \mapsto \frac{1}{t}\Big(f(x+t) + f(x-t) - 2\mu\Big)$$

est L^1 au voisinage de 0. Alors la série de Fourier de f converge simplement en x et

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \mu.$$

Cas fréquent : Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$, de somme $\frac{1}{2}\big(f(x^+) + f(x^-)\big)$. Plus généralement, si f est Höldérienne par morceaux, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$, de somme $\frac{1}{2}\big(f(x^+) + f(x^-)\big)$ (exemple : $f(x) = \sqrt{|x|}$ sur $[-\pi, \pi]$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ par morceaux, mais $\frac{1}{2}$-Höldérienne).

Remarque : La convergence en un point de S_N apparaît comme un phénomène local. Ceci se voit aussi grâce au résultat suivant.

$\star$ *Localisation :* [S] Si $f \in L^1$ est nulle p.p. sur $[a,b]$, et si $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$, alors $\big(S_N(f)\big)_{N\geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur $[\alpha,\beta]$.

Importance des sommes symétriques : La fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x - \pi$ pour $0 \leq x < 2\pi$ vérifie $c_0(f) = 0$ et $c_n(f) = \frac{i}{n}$ si $n \neq 0$. La série à sommes symétriques $S_N(f)(x) = \displaystyle\sum_{1\leq n\leq N} -\frac{2}{n}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, mais $\displaystyle\sum_{n\geq 1} i\frac{e^{inx}}{n}$ diverge pour $x = 0$.

$\bullet$ *Fonction continue à série de Fourier divergente.* [G] Il existe $f \in \mathcal{C}^0$ telle que $\big(S_N(f)(0)\big)_{N\geq 0}$ diverge : conséquence de Banach-Steinhauss ou, par exemple,

$$f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((1+2^{p^3})\frac{|x|}{2}\right) \qquad \text{pour } \ |x| \leq \pi.$$

$\bullet$ *Théorème de convergence normale.* [ZQ]-[G] Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors sa série de Fourier $\big(S_N(f)\big)_{N\geq 0}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, (autrement dit, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$ ou $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n(f)| + |b_n(f)| < \infty$) et sa somme est f.

$\star$ *Vitesse de convergence.* [CL] Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in \mathcal{C}^p$, alors, quand $N \to +\infty$,

$$|S_N(f) - f|_{\mathcal{C}^0} \leq |f^{(p)}|_{\mathcal{C}^0}\left(\frac{4}{\pi^2}\frac{\ln N}{N^p} + \mathcal{O}\big(\frac{1}{N^p}\big)\right).$$

$\star$ *Théorème de Bernstein.* [G] Si f est α-Höldérienne sur $\mathbb{R}$, avec $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, alors sa série de Fourier $\big(S_N(f)\big)_{N\geq 0}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et sa somme est f.

III - Le Théorème de Fejér.

Les moyennes de Césaro σ_N de la série de Fourier de f sont définies par [ZQ]

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f) = \sum_{|k|<N}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)c_k(f)e_k.$$

Le noyau de Fejér. On appelle noyau de Fejér la quantité :

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \sum_{|k|<N}\left(1-\frac{|k|}{N}\right)e_k(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2.$$

Ainsi, lorsque $f \in L^1$, on a :

$$\sigma_N(f)(x) = f * F_N(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)F_N(t)\,\frac{dt}{2\pi}.$$

$\bullet$ *Propriété du noyau de Fejér.* [ZQ] La suite $(F_N)_{N\geq 0}$ est une approximation de l'identité au sens

$$(i)\ \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\,dt = 1, \qquad (ii)\ \ F_N \geq 0, \qquad (iii)\ \ \forall 0<\delta<\pi, \quad \lim_{N\to+\infty}\int_{\delta<|t|<\pi} F_N(t)\,dt = 0.$$

La propriété (ii) est *cruciale*, car alors $|F_N|_{L^1} = 1$, alors que l'on a $\lim\limits_{N\to+\infty} |D_N|_{L^1} = +\infty$.

• *Théorème de Fejér.* [ZQ]

– Si $f \in \mathcal{C}^0$, $\qquad |\sigma_N(f)|_{\mathcal{C}^0} \leq |f|_{\mathcal{C}^0} \qquad$ et $\qquad \sigma_N(f) \to f$ dans $\mathcal{C}^0$ si $N \to +\infty$.

– Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p$, $\qquad |\sigma_N(f)|_{L^p} \leq |f|_{L^p} \qquad$ et $\qquad \sigma_N(f) \to f$ dans L^p si $N \to +\infty$.

• Conséquence : $\mathfrak{F} : L^1 \to c_0$ est *injective* [ZQ]. Par contre, $\mathfrak{F} : L^1 \to c_0$ n'*est pas* surjective [R] (conséquence de l'application ouverte, ou $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin(nx)}{\ln(n)}$ n'est pas une série de Fourier).

Ainsi, si la série de Fourier $\big(S_N(f)\big)_{N\geq 0}$ de $f \in L^1$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, sa somme est nécessairement f, et f est donc continue.

IV - Le point de vue hilbertien.

• *Densité.* [ZQ] L'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathcal{C}^0$ et L^p si $1 \leq p < \infty$. Si $f \in \mathcal{C}^0$, il se peut que $\big(S_N(f)\big)_{N\geq 0}$ diverge pour certains $x \in \mathbb{R}$, cependant il existe $(P_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{P}$ telle que $P_n \to f$ dans $\mathcal{C}^0$ (donc P_n peut différer de $S_N(f)$).

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de L^2. Si $f \in L^2$, alors $S_N(f) \to f$ dans L^2 quand $N \to +\infty$ et on a l'*égalité de Parseval*

$$\langle f, f\rangle = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

Autrement dit, $\mathfrak{F} : L^1 \to c_0$ induit une *isométrie* $\mathfrak{F} : L^2 \xrightarrow{\sim} \ell^2$.

Réciproquement, si $f \in L^1$, et si $\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ou $\big(a_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(b_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$, alors $f \in L^2$ et l'égalité de Parseval a lieu.

V - Pour la culture. Deux résultats difficiles qui montrent la différence entre L^1 et $\mathcal{C}^0$ ([K]).

⋆ *Théorème de Kolmogorov.* Il existe $f \in L^1$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \sup_{N\in\mathbb{N}} |S_N(f)(x)| = +\infty.$$

⋆ *Théorème de Carleson.* Pour toute $f \in \mathcal{C}^0$,

$$\text{p.p. } x \in \mathbb{R} \qquad S_N(f)(x) \to f(x) \qquad \text{si } N \to +\infty.$$

Références :

• A. Chambert-Loir & al., Vol. II, Ex. 5.1 p. 88.
• C. Zuily - H. Queffelec, Chap. IV.
• X. Gourdon,
• M. Schatzman, *Analyse numérique - Une approche mathématique* p. 154.
• W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.* p. 130-133.
• Y. Katznelson, *An introduction to Harmonic Analysis,* Chap. I et II.