Université de Nice-Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de Mathématiques
Année 2006-2007

TD: Théorème d'inversion locale

Exercice 1: Soient les relations $u = x + y^2$, $v = y + z^2$, $w = z + x^2$ $(x, y, z, u, v, w$ réels). Donnez une condition suffisante pour que ces relations définissent localement x, y, z comme fonctions de classe C^∞ de u, v, w. Cette condition étant remplie, exprimez $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ et $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$.

Exercice 2: Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 - 5x^3y^2 + 6y^3 + 18 = 0\}$. Montrez qu'il existe I, J intervalles ouverts tels que $2 \in I$, $1 \in J$, il existe $\varphi \in C^\infty(I, J)$ tels que pour tout $(x, y) \in I \times J$, $(x, y) \in \mathcal{D} \cap (I \times J)$ ssi $y = \varphi(x)$. Déterminez $\varphi'(2)$ et φ"(2).

Exercice 3: Soit $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y > 0 \text{ et } x + y^2 + zx + \ln y = 1 \text{ et } z - xy + xyz = 0\}$. Montrez qu'au voisinage de $(0, 1, 0)$, on peut exprimer localement y et z en fonction de x. Déterminez les différentielles de ces deux fonctions.

Exercice 4: Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$. Montrez qu'il existe $A_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $A \in \mathcal{D} \setminus \{A_0\}$, il existe U ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que $A \in U$ et $\mathcal{D} \cap U$ est difféomorphe à un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 5: Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \text{ et } |f'(x) - f'(y)| \leq C|x - y|$$

pour tous $x.y \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $\lambda_0 > 0$, il existe une famille de fonctions $u_\lambda \in C^2([0, 1])$ pour $\lambda \in] - \lambda_0, \lambda_0[$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} u''_\lambda(t) = \lambda f(u_\lambda(t)) & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ u_\lambda(0) = u_\lambda(1) = 0 & \end{array} \right\}$$

Pouvait-on utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz pour prouver ce résults?

Exercice 6: Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice posssédant n valeurs propres distinctes.

a. Montrez que si A est voisin de A_0, alors les valeurs propres de A dépendent continuement de A.

On cherche maintenant à construire une base de vecteurs propres pour A dépendant continuement de A. Pour cela, on se donne $(V_1, ..., V_n)$ une base de vecteurs propres de A_0. On fixe $i \in \{1, ..., n\}$.

b. Montrez qu'on peut supposer que $(V_i)^1 = 1$ (il s'agit de la première coordonnée).

c. Montrez qu'il existe une fonction continue $V_i : U \to \mathbb{R}^n$, où U est un voisinage de A_0 telle que $V_i(A)$ est une valeur propre de A pour tout $A \in U$ et $V_i(A_0) = V_i$. (On pourra raisonner par l'absurde).

d. Montrez que pour tout A proche de A_0, il existe une base de vecteurs propres de A dépendant continuement de A.

Exercice A: Soit $f : U \times V \to F$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction C^1, où U est un ouvert non vide de E et V est un ouvert non vide de F (E et F sont des espaces de Banach). On suppose qu'il existe $(a, b) \in U \times V$ tel que $f(a, b) = 0$ et $D_y f(a, b) : F \to F$ est inversible ($D_y f$ désigne la différentielle par rapport à la variable $y \in V$). En utilisant le théorème d'inversion locale, montrez qu'il existe U' ouvert de E, V' ouvert de F tels que $(a, b) \in U' \times V' \subset U \times V$, qu'il existe $\varphi \in C^1(U', V')$ tels que

$$\forall (x, y) \in U' \times V', \ (f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)) .$$

C'est tout simplement le théorème des fonctions implicites.

Exercice B: Inversement, montrez le théorème d'inversion locale à partir du théorème des fonctions implicites.