Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 9 au 15 octobre 2006

Exercice 1. Soit G un groupe et soit H un sous-groupe d'indice 2 de G ; montrez que H est distingué.

Exercice 2. *Cet exercice, plus délicat, généralise le précédent.* Soit G un groupe, soit n un entier et soit H un sous-groupe d'indice n de G. Soit $\mathfrak{S}$ le groupe des permutations de l'ensemble quotient G/H.

a) En considérons le morphisme de G dans $\mathfrak{S}$ déduit de l'action naturelle à gauche de G sur G/H (définie par la formule $g.g'H = gg'H$), montrez que H contient un sous-groupe distingué de G dont l'indice divise $n!$.

b) En déduire que si G est fini et si n est le plus petit nombre premier divisant $|G|$, alors H est distingué ; expliquer pourquoi l'on retrouve en particulier le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 3. Cet exercice reprend en partie l'exercice 5 de la feuille sur les groupes.

a) Soit G un groupe. Soit $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs, c'est-à-dire par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ avec x et y dans G. Montrez que $D(G)$ est distingé et que le quotient $G/D(G)$ est abélien. Soit π la flèche quotient de G vers $G/D(G)$. Montrez que pour tout morphisme f de G vers un groupe abélien H, il existe un unique morphisme g de $G/D(G)$ vers H tel que $f = g \circ \pi$.

b) Soit $(D^n(G))_n$ la suite de sous-groupes de G telle que $D^0(G) = G$ et $D^{n+1}(G) = D(D^n(G))$ pour tout n. Montrez l'équivalence des deux propositions ci-dessous :

i) il existe n tel que $D^n(G) = \{0\}$;
ii) il existe une suite finie $G = G_0,\ G_1, G_2,\ \ldots, G_n = \{e\}$ de sous-groupes de G possédant la propriété suivante : *pour tout i le groupe G_{i+1} est un sous-groupe distingué de G_i et le quotient G_i/G_{i+1} est abélien.*

Lorsque ces propriétés équivalentes sont satisfaites, on dit que G est *résoluble.* Montrez par exemple que S_4 est résoluble.

Exercice 4. Soit G un groupe. On appelle *centre de G*, et on note $Z(G)$, l'ensemble des éléments g de G tels que $gh = hg$ pour tout h appartenant à G.

a) Montrez que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G. Au passage, que vaut $Z(G)$ lorsque G est égal à $GL_n(k)$ pour un certain corps k ?

b) Soient p un nombre premier et n un entier non nul. Soit G un groupe de cardinal p^n. Montrez, en faisant opérer G sur lui-même par automorphismes intérieurs, que $Z(G)$ n'est pas réduit à $\{e\}$. En déduire par récurrence sur n que G est résoluble.

Exercice 5. On admet que A_n est simple pour tout entier n au moins égal à 5. Soit n un tel entier ; donnez la liste de tous les sous-groupes distingués de S_n.

Exercice 6. *Produit semi-direct.* Soient H et F deux groupes, et soit ϕ un morphisme de groupes de F dans $\operatorname{Aut} H$.

a) On munit l'ensemble $H \times F$ de la loi interne $*$ définie par la formule

$$(h, f) * (h', f') = (h\phi(f)(h'), ff').$$

Vérifiez que $H \times F$ muni de cette loi est un groupe, que l'on notera $H \rtimes_\phi F$. On l'appelle *produit semi-direct de H et F (relativement à ϕ).* Montrez que $h \mapsto (h, e)$ (resp. $f \mapsto (e, f)$) identifie H (resp. F) à un sous-groupe distingué (resp. à un sous-groupe) de $H \rtimes_\phi F$; vérifiez que les images de H et F par ces deux injections ont une intersection réduite au neutre et engendrent $H \rtimes_\phi F$.

b) Soit G un groupe et soit H un sous-groupe distingué de G ; on note π le morphisme quotient $G \to G/H$. Montrez que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) il existe un sous-groupe F de G tel que $H \cap F = \{e\}$ et tel que F et H engendrent G ;
ii) il existe un sous-groupe F de G et un morphisme ϕ de F dans $\operatorname{Aut} H$ tel que $(h, f) \mapsto hf$ induise un isomorphisme $H \rtimes_\phi F \simeq G$;
iii) il existe un morphisme σ de G/H dans G tel que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}$.