Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 23 au 29 octobre 2006

Exercice 1. Soit E un ensemble fini dont on note n le cardinal. On choisit une numérotation $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de E.

a) Montrez que la famille de transpositions $(\tau_{a_i,a_{i+1}})_{i=1,\ldots,n-1}$ engendre S_E.

b) Soit G un sous-groupe de S_E contenant τ_{a_1,a_2} et le n-cycle $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; montrez que $G = S_E$.

Exercice 2. Soit E un ensemble dont le cardinal est un nombre premier p.

a) Soit G un sous-groupe de S_E contenant un p-cycle et une transposition ; montrez que $G = S_E$.

b) Soit G un sous-groupe de S_E dont le cardinal est multiple de p et qui contient une transposition ; montrez que $G = S_E$.

Exercice 3. Combien de $\mathbb{F}_2$-droites vectorielles y a-t-il dans $\mathbb{F}_2^2$? En déduire un morphisme $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2) \to S_3$, et montrez qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Exercice 4. Soit σ une permutation d'un ensemble E à n éléments, dont la décomposition canonique comprend q_1 cycles de longueur l_1, q_2 cycles de longueur l_2, *etc.* (les n_i étant bien entendu deux à deux distincts) ; déterminez, en fonction des q_i et des l_i, le cardinal de la classe de conjugaison de σ dans S_E.

Exercice 5. On rappelle le résultat suivant, que vous devez connaître et savoir démontrer : si k est un corps et n un entier, les matrices de transvection (c'est-à-dire celles qui sont de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et λ dans k^*) engendrent le sous-groupe $\mathsf{SL}_n(k)$ de $\mathsf{GL}_n(k)$ défini comme le noyau du déterminant.

a) Soient k un corps fini et q son cardinal, et soit n un entier au moins égal à 2. Pour tout automorphisme (linéaire) u de k^n, on note $\varepsilon(u)$ la signature de la permutation de *l'ensemble* k^n induite par u.

b) Déterminez $\varepsilon(u)$ lorsque u est donnée par une matrice de transvection dans la base canonique.

c) En déduire que si q est impair, ou bien si q est pair et n au moins égal à 3, il existe un homomorphisme de groupes ρ de k^* dans $\{-1, 1\}$ tel que $\varepsilon(u) = \rho(\det u)$ pour tout automorphisme u de k^n.

d) On suppose q pair et n au moins égal à 3 ; montrez que $\varepsilon(u) = 1$ pour tout automorphisme u de k^n.

e) On suppose q impair ; montrez que $\varepsilon(u) = 1$ (resp. $\varepsilon(u) = -1$) si $\det u$ est un carré dans k^* (resp. n'est pas un carré dans k^*).