Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 27 novembre au 3 décembre 2006

Exercice 1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel et soit G un sous-groupe fini du groupe des bijections affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

a) Montrez qu'il existe un point O de $\mathcal{E}$ qui est fixe sous chacun des éléments de G.

b) Montrez qu'il existe un produit scalaire sur l'espace vectoriel directeur de $\mathcal{E}$ pour lequel tous les éléments de G sont des isométries.

Commentaire : on ramène ainsi l'étude des sous-groupes finis du groupe affine à celui des sous-groupe finis du groupe orthogonal.

Exercice 2.

a) Montrez qu'un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est ou bien de la forme $a\mathbb{Z}$, ou bien dense dans $\mathbb{R}$; en déduire qu'un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$, où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1, est ou bien isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un certain entier non nul n, ou bien dense dans $\mathbb{U}$.

b) Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien de dimension 2 et soit G un sous-groupe fini de $\mathsf{SO}(\mathcal{E})$. Montrez que G est cyclique. Si H est un sous-groupe fini de $\mathsf{O}(\mathcal{E})$, montrez que H est ou bien cyclique, ou bien isomorphe à un groupe diédral. Réciproquement, pour tout entier n, montrez qu'il existe un sous-groupe de $\mathsf{O}(\mathcal{E})$ isomorphe au groupe diédral de cardinal $2n$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien de dimension 3 et soit T un tétraèdre régulier centré en l'origine de $\mathcal{E}$, de sommets A, B, C, D. Soit G (resp. G^+) le groupe des isométries (resp. des isométries directes) de $\mathcal{E}$ qui stabilisent T.

a) Si g appartient à G, expliquer brièvement pourquoi g envoie tout sommet de T sur un autre sommet ; on note σ_g la permutation de $\{A, B, C, D\}$ induite par g.

b) Montrez que le morphisme $g \mapsto \sigma_g$, qui va de G dans $\mathfrak{S}_{\{A,B,C,D\}}$, est injectif.

c) Montrez que $g \mapsto \sigma_g$ est surjectif. *Indication : il suffit de montrer que son image contient toutes les transpositions.*

d) On a ainsi construit un isomorphisme $G \simeq \mathfrak{S}_{\{A,B,C,D\}}$. Modulo cet isomorphisme, à quel sous-groupe de $\mathfrak{S}_{\{A,B,C,D\}}$ correspond $G \cap \mathsf{SO}(E)$?

Exercice 4. Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien de dimension 3 et soit C un cube centré en l'origine de $\mathcal{E}$, de sommets A, B, C, D, E, F, G, H. Soit G (resp. G^+) le groupe des isométries de $\mathcal{E}$ qui stabilisent C.

a) Si u est une isométrie directe de $\mathcal{E}$, décrire, en fonction de l'axe de u et du cosinus de son angle, l'ensemble des droites de $\mathcal{E}$ invariantes sous u.

b) Si g appartient à G, expliquez brièvement pourquoi g envoie tout sommet de C sur un autre sommet, et toute diagonale de C sur une autre diagonale. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des 4 diagonales du cube. Pour tout g de G, l'on désigne par σ_g la permutation de $\mathbb{D}$ induite par g.

c) Donnez un élément non trivial du noyau du morphisme $g \mapsto \sigma_g$, qui va de G dans $\mathfrak{S}_{\mathbb{D}}$.

d) Montrez que la restriction à G^+ de $g \mapsto \sigma_g$ est injective.

e) Montrez que la restriction à G^+ de $g \mapsto \sigma_g$ est surjective. *Indication : il suffit de montrer que son image contient toutes les transpositions.*

f) En déduire que G est isomorphe à $\{-1, 1\} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{D}}$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3, et soit G un sous-groupe fini de $\mathsf{O}(\mathcal{E})$ qui n'est pas inclus dans $\mathsf{SO}(\mathcal{E})$; soit G^+ son intersection avec $\mathsf{SO}(\mathcal{E})$.

a) Quel est l'indice de G^+ dans G ?

b) Si $(-\mathrm{Id})$ appartient à G, montrez que G est exactement l'ensemble des éléments de $\mathsf{O}(\mathcal{E})$ de la forme $(u\mathrm{Id})g$, où u appartient à $\{-1, 1\}$ et g à G^+ ; en déduire que G est isomorphe à $\{-1, 1\} \times G^+$.

c) Si $(-\mathrm{Id})$ n'appartient pas à G, montrez que $g \mapsto ((\det\ g)\mathrm{Id})g$ définit un isomorphisme de G sur un sous-groupe G' de $\mathsf{SO}(\mathcal{E})$. Soit G'' l'image de G^+ dans G' ; montrez que G'/G'' est isomorphe à $\{-1, 1\}$; on note $\pi : G' \to \{-1, 1\}$ le morphisme surjectif composé $G' \to (G'/G'') \simeq \{-1, 1\}$; montrez que G est exactement l'ensemble des éléments de $\mathsf{O}(\mathcal{E})$ de la forme $(\pi(g)\mathrm{Id})g$, où g parcourt G'.

d) Soit H un sous-groupe fini de $\mathsf{SO}(\mathcal{E})$. Montrez que l'ensemble des éléments de $\mathsf{O}(\mathcal{E})$ de la forme $(u\mathrm{Id})h$, où u appartient à $\{-1, 1\}$ et h à H, est un sous-groupe de $\mathsf{O}(\mathcal{E})$ qui contient $-\mathrm{Id}$, et dont l'intersection avec $\mathsf{SO}(\mathcal{E})$ est exactement H.

e) Soit H un sous-groupe fini de $\mathsf{SO}(\mathcal{E})$, et soit π un morphisme surjectif de H dans $\{-1, 1\}$. Montrez que l'ensemble des éléments de $\mathsf{O}(\mathcal{E})$ de la forme $(\pi(h)\mathrm{Id})h$, où h appartient à H, est un sous-groupe de $\mathsf{O}(\mathcal{E})$ isomorphe à H, non contenu dans $\mathsf{SO}(\mathcal{E})$, et dont l'intersection avec $\mathsf{SO}(\mathcal{E})$ est le noyau de π. Que donne cette construction si l'on prend pour H le groupe des isométries directes qui préservent le cube, et pour π la signature (modulo l'identification de H avec le groupe des permuations d'un ensemble à 4 éléments) ?