Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 11 au 17 décembre 2006

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2.

a) Soient u et v deux vecteurs unitaires de E. Montrez qu'il existe une et une seule isométrie directe $r_{u\to v}$ de E qui envoie u sur v.

b) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de E ; on s'intéresse aux actions naturelles de $\mathsf{SO}(E)$ et de $\mathsf{O}(E)$ sur $\mathcal{C}$. Montrez que l'orbite d'un couple (u,v) sous l'action de $\mathsf{SO}(E)$ est l'ensemble des couples (u',v') tels que $r_{u'\to v'} = r_{u\to v}$. **Remarque : une telle orbite est ce qu'on appelle un *angle orienté.***

c) Montrez que l'orbite d'un couple (u,v) sous l'action de $\mathsf{O}(E)$ est l'ensemble des couples (u',v') tels que

$$r_{u'\to v'} = r_{u\to v} \text{ ou } r_{u'\to v'} = r_{u\to v}^{-1};$$

montrez qu'on peut également la caractériser comme l'ensemble des couples (u',v') tels que $< u'|v' >=< u|v >$. **Remarque : une telle orbite est ce qu'on appelle un *angle (non orienté).*** À quelle condition sur (u,v) ses orbites sous $\mathsf{SO}(E)$ et sous $\mathsf{O}(E)$ coïncident-elles ?

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension au moins égale à 3 et soit (u,v) un couple de vecteurs unitaires de E. Montrez que les orbites de (u,v) sous $\mathsf{SO}(E)$ et sous $\mathsf{O}(E)$ coïncident, et qu'elles peuvent toutes deux se décrire comme l'ensemble des couples (u',v') tels que $< u'|v' >=< u|v >$. **Remarque : cet exercice montre qu'il n'existe pas de bonne théorie des angles *orientés* en dimension au moins égale à 3.**

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases orthonormées de $\mathcal{B}$. On fait opérer les groupes $\mathsf{SO}(E)$ et $\mathsf{O}(E)$ sur $\mathcal{B}$ de manière naturelle. Combien y a-t-il d'orbites dans $\mathcal{B}$ sous l'action de $\mathsf{O}(E)$? Et sous l'action de $\mathsf{SO}(E)$?

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur un corps k, soit d un entier inférieur ou égal à la dimension de E et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension d.

a) Montrez que $\mathsf{GL}(E)$ agit transitivement sur $\mathcal{P}$.

b) Si E est de dimension 2 et si $d = 1$, montrez que cette action est même 3-transitive.

c) En supposant que E est de dimension finie n sur un corps fini k de cardinal q, déterminez le cardinal du stabilisateur d'un élément de $\mathcal{P}$, puis le cardinal de $\mathcal{P}$.

Exercice 5.

a) Soit k un corps algébriquement clos ; l'on fait opérer $\mathsf{GL}_n(k)$ sur $\mathsf{M}_n(k)$ par automorphismes intérieurs. Donnez un sous-ensemble S de $\mathsf{M}_n(k)$ qui rencontre une et une seule fois chaque orbite.

b) Soit k un corps ; l'on considère l'opération

$$((g,h),M) \mapsto gMh^{-1}$$

de $\mathsf{GL}_n(k) \times \mathsf{GL}_n(k)$ sur $\mathsf{M}_n(k)$. Donnez un sous-ensemble S de $\mathsf{M}_n(k)$ qui rencontre une et une seule fois chaque orbite.

c) Même question qu'en *b*) lorsque k n'est plus nécessairement un corps, mais simplement un anneau principal.