Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 22 au 28 janvier 2007

Exercice 1. Soit k un corps et soit E un espace affine sur k d'espace directeur $\overrightarrow{E}$. Soient $P_0, P_1, \dots, P_n$ des points de E. Montrez que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout indice i, la famille $(\overrightarrow{P_iP_j})_{j\neq i}$ est une famille génératrice (resp. une famille libre, resp. une base) de $\overrightarrow{E}$.

ii) Il existe un indice i, tel que la famille $(\overrightarrow{P_iP_j})_{j\neq i}$ soit une famille génératrice (resp. une famille libre, resp. une base) de $\overrightarrow{E}$.

iii) Pour tout point P de E, il existe au moins une (resp. au plus une, resp. exactement une) famille (α_i) d'éléments de k telle que

$$\sum \alpha_i = 1 \text{ et } P = \mathrm{Bar}((P_0, \alpha_0), \dots, (P_n, \alpha_n)).$$

On dit alors que $(P_0, \dots, P_n)$ est affinement génératrice (resp. affinement libre, resp. est un repère affine). Si $(P_0, \dots, P_n)$ est un repère affine de E et si $P \in E$, l'unique famille (α_i) telle que

$$\sum \alpha_i = 1 \text{ et } P = \mathrm{Bar}((P_0, \alpha_0), \dots, (P_n, \alpha_n))$$

sera appelée famille des *coordonnées barycentriques de* P dans le repère en question, et il arrivera que l'on écrive $P = \sum \alpha_i P_i$; pour une justification de cet abus, voir l'exercice 4.

Exercice 2. Soit k un corps et soit E un espace affine sur k d'espace directeur $\overrightarrow{E}$. Soient $P_0, P_1, \dots, P_n$ des points de E et $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ des scalaires. Soit φ l'application de E dans $\overrightarrow{E}$ qui envoie un point M sur $\sum \alpha_i \overrightarrow{MP_i}$.

a) On suppose que $\sum \alpha_i \neq 0$ et l'on note G le barycentre de la famille $((P_0, \alpha_0), \dots, (P_n, \alpha_n))$. Pour tout M, exprimez $\varphi(M)$ en fonction de M, de G, et des α_i.

b) On suppose que $\sum \alpha_i = 0$. Montrez que φ est constante.

À partir de maintenant, on suppose que $k = \mathbb{R}$ et que E est euclidien. On note ψ l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui envoie un point M sur $\sum \alpha_i \overrightarrow{MP_i}^2$.

c) On suppose que $\sum \alpha_i \neq 0$ et l'on note G le barycentre de la famille $((P_0, \alpha_0), \dots, (P_n, \alpha_n))$. Pour tout M, exprimez $\psi(M)$ en fonction de M, G, $\psi(G)$ et des α_i. Soit λ un réel ; décrire $\psi^{-1}(\lambda)$ (cela peut dépendre de λ et des données).

d) On suppose que $\sum \alpha_i = 0$ et l'on note $\overrightarrow{u}$ la valeur constante de φ. Si M et N sont deux points de E, exprimez $\psi(M) - \psi(N)$ en fonction de M, N et $\overrightarrow{u}$. Soit λ un réel ; décrire $\psi^{-1}(\lambda)$ (cela peut dépendre de λ et des données).

e) Soient A et B deux points distincts de E et soit λ un réel strictement positif. Décrire très précisément l'ensemble des points M de E qui vérifient l'égalité $||\overrightarrow{MA}|| = \lambda||\overrightarrow{MB}||$.

Exercice 3. Soit k un corps de caractéristique 3 et soient x et y deux éléments de k ; on suppose que $y \neq 0$. Soit T le triangle $((0,0),(1,0),(x,y))$ de l'espace affine k^2. Calculez les équations des trois médianes de T, et vérifiez qu'elles sont parallèles.

Exercice 4. Soit k un corps et soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel sur k, que l'on voit comme un espace affine sur k.

a) Soient $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$ des scalaires tels que $\sum \alpha_i = 1$, et soient $x_0,\ldots,x_n$ des éléments de $\overrightarrow{E}$. Soit G le barycentre de $((x_0,\alpha_0),\ldots,(x_n,\alpha_n))$. Vérifiez que $G = \sum \alpha_i P_i$, au sens des opérations qui définissent la structure de k-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$.

b) Soit n un entier strictement supérieur à la dimension de $\overrightarrow{E}$ et soient $x_0,\ldots,x_n$ des éléments de $\overrightarrow{E}$. Montrez qu'il existe une famille $(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)$ de scalaires non tous nuls telle que $\sum \alpha_i = 0$ et $\sum \alpha_i x_i = 0$.

c) On suppose que $k = \mathbb{R}$, et l'on conserve les notations de la question *b*). Soient $\beta_0,\ldots,\beta_n$ des réels positifs tels que $\sum \beta_i = 1$; posons $G = \sum \beta_i x_i$. Montrez qu'il existe un sous-ensemble I de $\{0,\ldots,n\}$ de cardinal n, et une famille $(\gamma_i)_{i\in I}$ de réels positifs tels que $\sum\limits_{i\in I} \gamma_i = 1$ et $G = \sum\limits_{i\in I} \beta_i x_i$.

d) Soit X un espace affine réel de dimension finie d, soit $\mathcal{P}$ une partie de X et soit $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$. Montrez que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points de X que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathrm{Bar}((p_0,\lambda_0),\ldots,(p_d,\lambda_d))$$

où les λ_i sont des réels positifs tels que $\sum \lambda_i = 1$ et où les p_i sont dans $\mathcal{P}$; en déduire que si $\mathcal{P}$ est compacte, alors $\mathcal{C}$ est compacte.