Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 19 au 25 mars 2007

Exercice 1. Soit G un groupe abélien fini ; on note G^* le groupe des homomorphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$.

a) Montrez que tout élément de G^* prend ses valeurs dans le groupe des nombres complexes de module 1.

b) Si G est cyclique d'ordre n, montrer que G^* est cyclique d'ordre n.

c) Soit H un sous-groupe de G. Montrez que l'application naturelle $G^* \to H^*$ est surjective.

d) En déduire que la suite $1 \to (G/H)^* \to G^* \to H^* \to 1$ est exacte.

e) Montrez que G^* a le même cardinal de G.

f) Montrez que l'application naturelle $G \to G^{**}$ (que l'on définira) est un isomorphisme.

g) *Plus difficile.* Soit e le plut petit entier strictement positif tel que $g^e = e$ pour tout g appartenant à G. Soit γ un élément de G d'ordre exactement e (l'existence de γ est assurée par l'exercice 1 de la feuille de la semaine du 13 au 19 novembre 2006). Utilisez le *d*) pour montrer que le groupe engendré par γ admet un supplémentaire dans G, et en déduire que G est isomorphe à une somme directe $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$ avec $d_r = e$ et $d_i | d_{i+1}$ pour tout $i \leq r-1$.

Exercice 2. *A propos de l'exponentielle complexe.* On définit l'exponentielle comme l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui envoie z sur $\sum z^n/n!$ (la série entière en question est de rayon infini, comme on le vérifie aussitôt) ; on admet (exercice facile sur le produit de séries) que $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2$ pour tout couple (z_1, z_2) d'éléments de $\mathbb{C}$. On en déduit que exp est un homomorphisme de groupes de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}^*$, on se propose d'en montrer la surjectivité de deux façons différentes.

Première preuve.

a) Si z est réel, montrez que $\exp z$ est un réel strictement positif. Montrez que exp induit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

b) Si z est imaginaire pur, montrez que $\exp z$ est de module 1. Pour tout réel θ, on note $\cos\theta$ et $\sin\theta$ les parties réelles et imaginaires de $\exp i\theta$. Montrez, en étudiant les tableaux de variations de sin et cos, que tout nombre complexe u de module 1 est de la forme $\exp i\theta$ pour un certain réel θ ; en déduire la surjectivité de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$; montrez également l'existence d'un réel $\pi > 0$ tel que $\theta \mapsto \exp i\theta$ ait pour noyau $2\pi\mathbb{Z}$, en déduire que le groupe des nombres complexes de module 1 est isomorphe à $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$.

Seconde preuve.

a) Montrez que l'image de l'exponentielle contient un voisinage ouvert de 1 dans $\mathbb{C}^*$; en déduire que cette image est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{C}^*$.

b) Expliquez pourquoi tout sous-groupe ouvert de $\mathbb{C}^*$ est également fermé, et conclure.