

Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 26 mars au premier avril 2007

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension ≥ 1 . Montrez que $O(E)$ a exactement deux composantes connexes, à savoir $SO(E)$ et son complémentaire.

Exercice 2. *Coloriages du cube.*

a) Soit G un groupe opérant sur un ensemble E . Si G et E sont finis, montrez la *formule de Burnside*

$$|G| \times \text{nombre d'orbites} = \sum_{g \in G} |E^g|$$

où E^g désigne pour tout g l'ensemble des points fixes de g .

b) On fixe un entier $k \geq 1$. Un commerçant vend des cubes coloriés à l'aide de k teintes, chaque face étant monochrome. Combien de modèles différents peut-il proposer ?