Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 26 mars au premier avril 2007

Exercice 1. *Une interprétation géométrique de l'holomorphie.* Soit E un plan vectoriel euclidien et soit f une application linéaire de E dans E. On dit que f *conserve les angles* (resp. *conserve les angles orientés*) si pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs non nuls de E, on est dans l'un des deux cas suivants :

i) $f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$;
ii) $f(\overrightarrow{u}) \neq \overrightarrow{0}$ et $f(\overrightarrow{v}) \neq \overrightarrow{0}$ et les angles (resp. les angles orientés) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $(f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v}))$ coïncident.

a) Montrez que f conserve les angles (resp. les angles orientés) si et seulement si f est de la forme λu, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et où u est une isométrie (resp. une isométrie directe) de E ; lorsque λ est non nul, on dit qu'une telle f est une *similitude* (resp. une *similitude directe*).

b) On voit $\mathbb{C}$ comme un plan vectoriel euclidien de la manière usuelle (la base $(1, i)$ est orthonormée). Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, soit f une application différentiable de U dans $\mathbb{C}$ et soit u appartenant à U. Montrez que $\mathrm{D}_u f$ conserve les angles orientés si et seulement si f est holomorphe en u.

Exercice 2. On voit $\mathbb{C}$ comme un plan vectoriel euclidien de la manière usuelle (la base $(1, i)$ est orthonormée).

a) Soient z et t deux nombres complexes. Exprimez leur produit scalaire.

b) Donnez la forme générale de l'équation d'une droite de $\mathbb{C}$, en notation complexe.

c) Donnez la forme générale de l'équation d'un cercle de $\mathbb{C}$, en notation complexe.

d) Soit $r > 0$ et soit φ *l'inversion de centre O et de rapport r*, c'est-à-dire l'application de $\mathbb{C} - \{O\}$ dans lui-même qui envoie un point M sur le point N tel que $\overrightarrow{ON} = \dfrac{r}{\|\overrightarrow{OM}\|} \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$. Décrivez φ par une formule en notation complexe. Soit D une droite passant (resp. ne passant pas) par O. Décrire $\varphi(D - \{O\})$ (resp. $\varphi(D)$). Soit C un cercle passant (resp. ne passant pas) par O. Décrire $\varphi(C - \{O\})$ (resp. $\varphi(C)$).