Agrégation, exercices bases hilbertiennes,
Année 2005-2006.

A. Un espace de Hilbert de fonctions holomorphes. Soit U le disque unité de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $L^2(U)$ l'espace des fonctions de carré intégrable à valeurs complexes sur U, et H le sous espace de $L^2(U)$

$$H = \{f \in L^2(U) \text{ f est holomorphe sur } U\}.$$

- 1. Prouver que les vecteurs $e_n = z^n$, $n \geq 0$ sont 2 à 2 orthogonaux dans $L^2(U)$ et calculer leur norme.
- 2. Soit $z \in U$. Montrer que pour $|z| + r < 1$ on a
$$|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r} ||f||_{L^2}$$
et en déduire que H est un sous espace fermé de $L^2(U)$.
- 3. Soit $f = \Sigma f_q z^q$ un élément de H. Calculer le produit scalaire $(f|e_n)$. En deduire une base hilbertienne de H et exprimer la norme de f en fonction de la suite (f_q).

B. Convergence faible Soit H un espace de Hilbert séparable, c'est à dire possédant une base orthonormale au plus dénombrable. On dit qu'une suite bornée (x_n) converge "faiblement" vers un vecteur x de H si

$$lim_{n\to\infty}(x_n - x|y) = 0 \ \forall y \in H$$

(on remarquera que si (x_n) converge vers x dans H, (x_n) converge faiblement vers x)

- 1. Soit e_k une base orthonormale de H. Prouver que (x_n) converge faiblement vers x si et seulement si $lim_{n\to\infty}(x_n - x|e_k) = 0$ pour tout k. En déduire que de toute suite bornée de H, on peut extraire une sous suite faiblement convergente.
- 2. Montrer que si (x_n) converge faiblement vers x et si $lim_{n\to\infty}||x_n|| = ||x||$, alors (x_n) converge vers x dans H.

C. Fonctions d'Hermite.

- 1.Montrer que $(\frac{d}{dx})^n(e^{-x^2}) = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$ où H_n est un polynôme de degré n dont on calculera le coéfficient de plus haut degré;
- 2. Montrer que $\phi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ et calculer les produits scalaires $(\phi_n|\phi_m)$. En déduire que, en posant $c_n = \pi^{-1/4} 2^{-n/2}(n!)^{-1/2}$, les fonctions $\psi_n = c_n \phi_n$ forment un système orthonormal dans $L^2(\mathbb{R})$.
- 3. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $(f|\psi_n) = 0$ pour tout n. On pose $g(x) = e^{-x^2/2} f(x)$. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et que sa transformée de Fourier est identiquement nulle. (on pourra montrer que à ξ fixé, il existe une suite (P_n) de polynômes telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $lim_{n\to\infty} P_n(x) = e^{-ix\xi}$ et $|P_n(x)| \leq e^{|x\xi|}$. En déduire que (ψ_n) est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.