TD équations de la chaleur et séries de Fourier

On veut trouver une solution f à l'équation suivante

$$\partial_t f - \partial_x^2 f = 0, \quad t \geq 0, x \in \Pi,$$

où Π est le tore $[0,\ 2\pi]$.
1) Supposons que l'on ait une solution $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Pi)$. Écrire léquation différentielle satisfaite par les coefficients de Fourier de f en x.
2) On étudie maintenant la série suivante

$$f(t,x) = \sum_k c_k e^{-tk^2}\, e^{ikx},$$

où les c_k sont des coefficients fixés quelconques vérifiant

$$\sum_k |c_k|^2 < \infty.$$

i) Montrer que cette série définit bien une fonction C^∞ en t et x sur $\mathbb{R}_+^* \times \Pi$.
ii) Vérifier que $f(t,x)$ est une solution de l'équation de la chaleur.
iii) Soit $f^0(x) = \sum_k c_k e^{ikx}$. Prouver que f^0 est bien définie dans $L^2(\Pi)$.
iv) Montrer que $f(t,x)$ converge vers $f^0(x)$ dans $L^2(\Pi)$ quand t tend vers 0.
3) Soit $G(t,x) = \sum_k e^{-tk^2}\, e^{ikx}$.
i) Vérifier que G définit bien une fonction C^∞ pour tout $t > 0$.
ii) Prouver que $f(t,x) = G \star_x f^0$ pour tout $t > 0$.