Agrégation, septembre 2006

Relations coefficients et racines

- [Ar-Fr] J.M. Arnaudies, H. Fraysse, Cours de Mathématiques, Algèbre Dunod
- [Fr-Gi-Ni-1] Exercice de mathématiques , oraux x-ens, algèbre 1

Rappel : Soit K un corps commutatif. Soit $P \in K[X]$ un polynôme d'une variable de degré n strictement positif. Le polynôme P est dit scindé sur K s'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ et $\lambda \in K$ tel que :

$$P = \lambda(X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_n) \quad .$$

Ce sera le cas si et seulement si P a p racines distinctes dans K dont la somme des multiplicités est $n = \deg P$. À une permutation de $\mathcal{S}_n$ près l'ensemble $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est unique. C'est l'ensemble des racines de P. Si P est scindé, notons alors $\beta_1, \ldots, \beta_p$ les racines distinctes de P, $k_1, \ldots, k_p$ leurs multiplicités respectives et a_0 le coefficient de X^n dans P, alors :

$$P = a_0 \prod_{i=1}^{p} (X - \beta_i)^{k_i}$$

Un corps K est dit algébriquement clos si tout polynôme de $K[X]$ est scindé sur K.

Pour $1 \leq p \leq n$, notons $s_p(X_1, \ldots X_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} X_{i_1} \ldots X_{i_p}$ le polynôme symétrique élémentaire de n variables.

Pour tout entier p, notons $S_p(X_1, \ldots X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^p$. Les formules de Newton relient les S_p aux polynomes symétriques élémentaires de n variables :

$$\text{si } k \leq n \ : \ S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0$$

$$\text{si } k > n \ : \ S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^n \sigma_n S_{k-n} = 0$$

Proposition : Soit $P = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ un polynôme d'une variable de degré n strictement positif que nous supposons scindé sur K.

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ l'ensemble de ses racines, alors pour tout entier p compris entre 1 et n :

$$s_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^p \frac{a_p}{a_0} \quad .$$

Exercice 1 Montrer qu'un corps K est algébriquement clos si et seulement si tout polynôme non constant de $K[X]$ a une racine dans K.
Montrer qu'un corps algébriquement clos est de cardinal infini.

Exercice 2 (Théorème de Wilson) Soit p un nombre premier.
1) Montrer que $\dot{1}, \ldots, \dot{p-1}$ sont racines du polynôme $X^{p-1} - 1 \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$.
2) En déduire $(p-1)! = -1$ (mod(p).

Exercice 3 Soit $\theta \in \mathbf{R}$.
1) Factoriser le polynôme $F(X) = (X+1)^n - e^{2in\theta}$.
2) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$: $e^{i\alpha} - 1 = 2i\sin(\alpha/2)e^{i\alpha/2}$.
3) Établir la formule :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (\sin(\theta + \frac{k\pi}{n}) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}} \quad .$$

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$.

Exercice 4 Trouver un polynôme unitaire (c.a.d. dont le terme de plus haut degré est égal à 1) dont les racines sont les carrés de celles de X^3+aX^2+bX+c.

Exercice 5 Soit p, q des nombres complexes et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les racines du polynôme $X^3 + pX = q$. Trouver un polynôme unitaire dont les racines sont :

$$(\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 \ , \ (\lambda_1)^2 + (\lambda_3)^2 \ , \ (\lambda_2)^2 + (\lambda_3)^2 \quad .$$

Exercice 6 (Méthode de Le Verrier) Soit A une matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont des nombres complexes. On considère la suite A_k définie par récurrence :

$$A_1 = A \quad , \quad A_{k+1} = A_k A - \frac{\operatorname{trace} A_k}{k} A \quad .$$

1) Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines du polynôme caractéristique de A. Montrer en utilisant les formules de Newton que pour $k \leq n$:

$$A_k = A^k - s_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A^{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}s_{k-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A \quad .$$

2) Puis montrer que le polynôme caractéristique de A est :

$$\det(X\mathrm{Id} - A) = X^n - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{trace}\, A_k}{k} X^{n-k}$$

On obtient ainsi un algorithme de calcul du polynôme caractéristique d'une matrice.
3) Montrer que A_k est nul pour $k > n$.
En fait, tout reste vrai si l'on suppose que les coefficients de A sont dans un corps de caractéristique nul.