Agrégation, exercices sur la connexité,
Année 2006-2007.

A. Connexité

Un espace topologique E est connexe si et seulement si les seules parties A de E à la fois ouvertes et fermées sont E et $\emptyset$.

A1. Une caractérisation des espaces connexes .

Soit E un espace topologique. Montrer que E est connexe si et seulement si les seules applications continues de E dans l'ensemble à deux éléments $\{-1, +1\}$ sont les applications constantes. En déduire que si X est un espace topologique et $E \subset X$ une partie connexe de X, alors l'adhérence $\overline{E}$ de E dans X est connexe et plus généralement, toute partie A de X vérifiant $E \subset A \subset \overline{E}$ est connexe.

A2. Propriété fondamentale . Montrer qu'une partie E de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si E est un intervalle.

A3. Connexité et continuité . Soit E un espace connexe et X un espace topologique. Montrer que si f est une application continue de E dans X, alors $f(E)$ est une partie connexe de X. Lorsque $X = \mathbb{R}$, montrer que $f(E)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

A4. Unions, intersections . Soit X un espace topologique et E_1, E_2 deux parties connexes de X. Montrer que si $E_1 \cap E_2$ est non vide, alors $E_1 \cup E_2$ est connexe. Qu'en est-il de $E_1 \cap E_2$? Montrer que si les $E_i, i \in I$, sont des parties connexes de X telles que $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ pour tout $i, j \in I$, alors $E = \cup_{i \in I} E_i$ est connexe.

A5. Produits . Montrer que si E_1, E_2 sont connexes, l'espace produit $E = E_1 \times E_2$ est connexe.

A6. Passage des douanes . Soit X un espace topologique et A une partie ouverte de X. Soit γ une application continue de $[0, 1]$ dans X telle que $\gamma(0) \in A$ et $\gamma(1) \in X \setminus \overline{A}$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $\gamma(c) \in \overline{A} \setminus A$.

A7. Un théorème de Darboux . Soit f une fonction dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction dérivée f' possède la propriété des valeurs intermédiares. (utiliser les fonctions $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $h(x) = \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$)

B. Connexité par arc

Un espace topologique E est connexe par arc si et seulement si $\forall x, y \in E$, il existe une application continue de $[0, 1]$ dans E telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

B1. Propriétés générales.

Montrer que si E est connexe par arc, E est connexe.
Montrer que si E_1, E_2 sont connexes par arc, $E = E_1 \times E_2$ est connexe par arc.
Soit X un espace topologique et E_1, E_2 deux parties connexes par arcs de X. Montrer que si $E_1 \cap E_2$ est non vide, alors $E_1 \cup E_2$ est connexe par arc.
Montrer que toute partie convexe de $\mathbb{R}^d$ est connexe par arc.

Montrer que la partie A de $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x, y = sin(1/x)),\ x > 0\} \cup \{(0, y), y \in [-1, 1]\}$$

est connexe mais n'est pas connexe par arc.

B2. Topologie . Montrer que les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. Montrer que si f est une application continue et surjective de l'intervalle $[0, 1]$ sur le carré $[0, 1]^2$ (on appelle f une courbe de Péano), alors f n'est pas injective.

B3. Groupes et espaces classiques.
Montrer que le groupe unitaire $U(n)$ des matrices $M \in M_n(\mathbb{C})$, $M^*M = Id$ est connexe. (écrire $M = e^{iA}$ avec $A^* = A$).
Montrer que le groupe spécial orthogonal $SO(n)$ des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M^*M = Id$ et $det(M) = 1$ est connexe.
Montrer que la sphère $x_1^2 + ... + x_d^2 = R^2$ de rayon $R > 0$ de $\mathbb{R}^d$ est connexe par arc pour $d \geq 2$.

C. Composantes connexes
Dans un espace topologique X, on dit que x et y sont connectés s'il existe une partie connexe E de X qui contient x et y.

C1.
Montrer que la relation $x \sim y$ ssi x et y sont connectés est une relation d'équivalence.

Soit X un espace topologique et $x \in X$. On note C_x l'ensemble des y connectés à x, et on appelle C_x la composante connexe de x dans X.

C2. Propriétés générales.
Quelle est la composante connexe de 0 dans $X = \mathbb{R}$? Quelle est la composante connexe de 0 dans $X = \mathbb{Q}$?
Montrer que la composante connexe C_x de x dans X est toujours fermée. Montrer que C_x est la plus grande partie connexe de X qui contient x.
Un espace topologique X est dit localement connexe si tout point x de X admet un voisinage ouvert connexe. Montrer que si X est localement connexe, pour tout x dans X, la composante connexe C_x est ouverte.

C3. Caractérisation des ouverts de $\mathbb{R}$.
Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts. Pour tout $\varepsilon > 0$, construire un ouvert $\Omega_\varepsilon \subset [0, 1]$, dense dans $[0, 1]$ et de mesure de Lebesgue inférieure à ε.

C4. Groupes classiques. Montrer que le groupe orthogonal $O(n)$ des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M^*M = Id$ a 2 composantes connexes, $SO(n)$ et $gSO(n)$ où g est une symétrie quelconque par rapport à un hyperplan.

D. Applications

D1. Le théorème de d'Alembert.
Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ un polynôme à coefficients complexes

de degré $n \geq 1$. Soit $X = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann; un voisinage de l'infini dans X est une partie A de X telle que $\infty \in A$ et il existe $R > 0$ tel que $\{|z| > R\} \subset A$. Montrer que X est connexe et que P se prolonge en une application continue p de X dans X en posant $p(\infty) = \infty$.
Montrer que $p(X)$ est un ouvert de X.
En déduire que p est surjectif, et donc qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $p(c) = 0$.

D2. Un théorème de Rouché.

Soient f, g deux fonctions holomorphes définies au voisinage du disque unité $|z| \leq 1$, telles que $|g(z)| < |f(z)|$ pour tout z dans le cercle unité $|z| = 1$. Prouver que f et $f + g$ ont le même nombre de zéros dans le disque ouvert $|z| < 1$.
On commencera par prouver que le nombre $N(f)$ de zéros de f dans le disque ouvert $|z| < 1$ est donné par la formule

$$N(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

et on utilisera la fonction holomorphe $f(z) + tg(z)$ pour $t \in [0, 1]$.

D3. Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$.

Soit $SL(2, \mathbb{R})$ le groupe des matrices 2×2, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = 1$. Montrer que $SL(2, \mathbb{R})$ est connexe par arc.

Montrer qu'il n'existe pas d'application continue F de $[0, 1] \times (\mathbb{R}/ 2\pi\mathbb{Z})$ dans $SL(2, \mathbb{R})$ telle que

$$F(0, \theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

et

$$F(1, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$