CONTINUITE & DERIVABILITE.

Ex. 1 : Fonctions continues, dérivables.

1) La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est-elle continue en un point ?

2) La *fonction de Weierstrass* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$ irréductible. Est-elle continue aux rationnels ? aux irrationnels ? Démontrer que si $a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $\lim_{x\to a, x\neq a} f(x)$ existe et vaut 0.

3) Soit $f(x) = x^{\frac{4}{3}} 1_{\mathbb{Q}^+}(x)$. Déterminer les points où f est continue. Est-elle dérivable en 0 ?

4) On considère $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Vérifier que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)$, et calculer f' sur $\mathbb{R}^*$. La fonction f est-elle continue en 0 ? dérivable ? La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

5) La fonction $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Montrer que f vérifie le théorème des valeurs intermédiaires (*i.e.* si I est un intervalle, $f(I)$ est un intervalle).

6) Si $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais $f' \notin L^1(\mathbb{R}^*)$.

Ex. 2 : Théorème des accroissements finis et conséquences. Soient $a < b$ deux réels, et $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a,b[$.

1) Montrer que si f a un maximum en $c \in]a,b[$, alors $f'(c) = 0$.

2) *a)* Montrer que si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
b) En déduire le théorème des accroissements finis : il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (on pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - p(x-a)$, où $p = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$).
c) A l'aide de $f(x) = |x|$, montrer qu'on ne peut pas remplacer "dérivable" par "dérivable à gauche et à droite" sur $]a,b[$.

3) *a)* Montrer que si $\ell = \lim_{x\to a^+} f'(x)$ existe, alors f est dérivable en a à droite et $f'_d(a) = \ell$.
b) En déduire que si, en outre, $f \in \mathcal{C}^1(]a,b[)$ et f' a une limite en a^+ et b^-, alors f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

4) On considère la fonction $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$.
a) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et (par récurrence) qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour $x > 0$, $f^{(n)}(x) = x^{-2n} P_n(x) f(x)$.
b) Déduire de **3)** *b)* que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, puis que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

5) On suppose de plus f dérivable à droite en a et à gauche en b. On souhaite montrer le théorème de Darboux : $f'([a,b])$ est un intervalle.
a) On suppose d'abord que $f'(a) > 0 > f'(b)$. Soit $c \in [a,b]$ un point où f atteint son maximum. Montrer que $c \in]a,b[$ par l'absurde (déterminer le signe de $f'(c)$), et conclure que $f'(c) = 0$.
b) Si p est entre $f'(a)$ et $f'(b)$, montrer que $p \in f'([a,b])$ (on pourra utiliser la fonction $g(x) = px - f(x)$). Conclure.

Ex. 3 : Points où f'_g et f'_d diffèrent. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$. On note E l'ensemble des $x \in I$ tels que f est dérivable à gauche et à droite en x mais $f'_g(x) \neq f'_d(x)$. On se propose de montrer que E est (au plus) dénombrable. On note $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des rationnels, $\varphi(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ pour $x \neq y$ et $E^+ = \{x \in E, f'_g(x) < f'_d(x)\}$.

1) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ (minimal) tel que $f'_g(x) < r_k < f'_d(x)$. Justifier que pour $y < x$ assez proche de x, $\varphi(x,y) < r_k$. En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ (minimal) tel que $\varphi(x,y) < r_k$ si $r_m < y < x$. Démontrer de même qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ (minimal) tel que $\varphi(x,y) > r_k$ si $x < y < r_n$.

2) Pourquoi a-t-on $f(x) - f(y) > r_k(x-y)$ si $r_m < y < r_n$, $y \neq x$? En déduire que l'application $E^+ \ni x \mapsto (k,m,n) \in \mathbb{N}^3$ est injective. Conclure.

3) Justifier que si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe (I intervalle ouvert), alors f est dérivable sauf en un nombre de points (au plus) dénombrable.

Ex. 4 : l'escalier du diable. On considère la suite $(K_n)_{n\geq 0}$ d'ensembles définie par $K_0 = [0,1]$, $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{3}{3}]$, $K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$... à chaque fois, pour passer de K_n à K_{n+1}, on découpe chaque segment de K_n en trois, et on retire celui du milieu. On note enfin *l'ensemble de Cantor* $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ (voir aussi GOURDON p. 62).

1) *a)* Vérifier que $(K_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de compacts : K est-il vide ?

b) Justifier que $\lambda(K_{n+1}) = \frac{2}{3}\lambda(K_n)$, où λ est la mesure de Lebesgue. En déduire que $\lambda(K_n) = \frac{2^n}{3^n}$, puis que $\lambda(K) = 0$. En déduire que K est d'intérieur vide.

c) Démontrer que si $[a,b]$ est un segment de K_n (une composante connexe de K_n), alors on a $\lambda(K_{n+1} \cap [a,b]) = \frac{2}{3}\lambda(K_n \cap [a,b])$.

2) On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x \leq 1$, $f_n(x) = \dfrac{1}{\lambda(K_n)} \displaystyle\int_0^x 1_{K_n}(t)\, dt$.

a) Dessiner f_0, f_1 et f_2.
b) Montrer que f_n est croissante, et $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$. Etablir que f_n est constante sur l'intervalle I si $I \subset [0,1] \setminus K_n$.
c) Déduire de **1)** *c)* que si $[a,b]$ est un segment de K_n, alors $f_{n+1}(b) - f_{n+1}(a) = f_n(b) - f_n(a)$. En déduire que $f_{n+1}(b) = f_n(b)$ et $f_{n+1}(a) = f_n(a)$ (raisonner en prenant les segments de K_n un à un), puis que $f_{n+1} = f_n$ sur $[0,1] \setminus K_n$.
d) Soit $x \in [a,b]$ un segment de K_n. En utilisant **1)** *b)* et $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (f_{n+1}(x) - f_{n+1}(a)) - (f_n(x) - f_n(a))$, justifier que $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Justifier alors que $|f_{n+1} - f_n|_\infty \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, puis que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

3) Démontrer que $f = \lim f_n$ est continue, croissante, et $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Etablir enfin que f est dérivable sur $[0,1] \setminus K$, et que si $x \in [0,1] \setminus K$, $f'(x) = 0$. A-t-on $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\, dt$?

Références :

- X. GOURDON, p. 108 *(Ex. 1 2))*; p. 70/73/76 *(Ex. 2)*.
- CHAMBERT-LOIR & AL., *Exercices d'Analyse - II*, Exercice 15.2 *(Ex. 3)*;
- W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe.* p. 178 *(Ex. 4)* (avec une toute petite faute...).