TD continuité uniforme

Exercice 1
1) Soit f une fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'elle est uniformément continue.
2) Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f ait une limite en $+\infty$ et en $-\infty$. Prouver que la continuité est uniforme.

Exercice 2 Montrer que l'intégrale de Lebesgue est uniformément continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit f une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\phi \in C_c(\mathbb{R})$ avec $\int \phi(x)\,dx = 1$, on pose $\phi_n(x) = n\phi(nx)$. Prouver que $\phi_n \star f$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. A-t-on le même résultat si ϕ est seulement dans L^1 ?

Exercice 4
1) Soit f_n une suite d'injections d'un espace de Banach E dans F. On suppose que les f_n convergent uniformément vers f. Montrer que si f^{-1} est uniformément continue sur $I \subset F$ alors f_n^{-1} converge uniformément vers f^{-1} sur

$$I^\circ \cap \bigcap_n im f_n.$$

2) Soit f_n une suite de fonctions inversibles de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et g_n la suite des inverses. Prouver que si f_n et g_n convergent uniformément vers f et g deux fonctions continues alors g est l'inverse de f.