TD sur les convolutions et les espaces L^p

Pour deux fonctions mesurables f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on rappelle la definition de la convolution $f \star g$ qui est égale quand elle existe à l'intégrale

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

1) Prouver que si $f \star g(x)$ alors $g \star f(x)$ existe et ces deux quantités sont égales.
2) On suppose que $f \in L^1$ et $g \in L^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Montrer que $f \star g(x)$ est définie pour presque tout x, est dans L^p et que

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p.$$

3) On prend maintenant $g \in L^p$ et $f \in L^q$ avec $1/p + 1/q = 1$. Expliquer que $f \star g(x)$ est définie pour tout x (et non pour presque tout x), est dans L^∞ et

$$\|f \star g\|_\infty \leq \|g\|_p \, \|f\|_q.$$

4) Toujours dans le cas $g \in L^p$ et $f \in L^q$ avec $1/p + 1/q = 1$, prouver que $f \star g$ est uniformément continue.
5) On considère maintenant $g \in L^p$ et $f \in L^q$ avec $1/p + 1/q \geq 1$. Montrer que $f \star g$ est définie presque partout et appartient à L^r avec $1/r + 1 = 1/p + 1/q$ et

$$\|f \star g\|_r \leq \|g\|_p \, \|f\|_q.$$