Relations coefficients et racines
correction des exercises 4 et 6

Exercice 4 Trouver un polynôme unitaire (c.a.d. dont le terme de plus haut degré est égal à 1) dont les racines sont les carrés de celles de X^3+aX^2+bX+c.

On suppose que X^3+aX^2+bX+c est scindé dans K (sinon se placer dans un corps ad-hoc plus grand que K). Le terme de plus haut degré de X^3+aX^2+bX+c étant 1, il existe alors $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$ tel que :

$$X^3+aX^2+bX+c = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$$

Le polynôme cherché est :

$$T(X) = (X-\lambda_1^2)(X-\lambda_2^2)(X-\lambda_3^2)$$

Si $s_1(X_1, X_2, X_3)$, $s_2(X_1, X_2, X_3)$, $s_3(X_1, X_2, X_3)$ sont les trois polynômes symétriques des racines, nous obtenons :

$$T(X) = X^3 - s_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)X^2 + s_2(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)X - s_3(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$$

Or, nous avons :

$$s_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -a \ , \ s_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = b \ , \ s_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -c$$

Il en résulte

$$s_3(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2) = s_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)2 = c^2$$

$$s_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2) = s_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^2 - 2s_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = a^2 - 2b$$

$$s_2(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2) = (s_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3))^2 - 2s_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)s_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = b^2 - 2ca$$

Ainsi, nous obtenons :

$$T(X) = X^3 + (2b-a^2)X^2 + (b^2-2ca)X - c^2$$

Exercice 6 (Méthode de Le Verrier) Soit A une matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont des nombres complexes. On considère la suite A_k définie par récurrence :

$$A_1 = A \quad , \quad A_{k+1} = A_k A - \frac{\operatorname{trace} A_k}{k} A \quad .$$

1) Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines du polynôme caractéristique de A. Montrer en utilisant les formules de Newton que pour $2 \leq k \leq n$:

$$A_k = A^k - s_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A^{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}s_{k-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A \quad .$$

2) Puis montrer que le polynôme caractéristique de A est :

$$\det(X\mathrm{Id} - A) = X^n - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{trace}\, A_k}{k} X^{n-k}$$

On obtient ainsi un algorithme de calcul du polynôme caractéristique d'une matrice.
3) Montrer que A_k est nul pour $k > n$.
En fait, tout reste vrai si l'on suppose que les coefficients de A sont dans un corps de caractéristique nul.

Rappel :
Pour $1 \leq p \leq n$, notons $s_p(X_1, \ldots X_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} X_{i_1} \ldots X_{i_p}$ le polynôme symétrique élémentaire de n variables. Pour tout entier p, notons $S_p(X_1, \ldots X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^p$. Les formules de Newton relient les S_p aux polynomes symétriques élémentaires de n variables :

$$\text{si } k \leq n \ : \ S_k -_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}s_{k-1}S_1 + (-1)^k k s_k = 0$$

$$\text{si } k > n \ : \ S_k - s_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}s_{k-1}S_1 + (-1)^n s_n S_{k-n} = 0$$

Corrigé :
1) Si P est une matrice inversible, la trace de $P^{-1}AP$ est égal à la trace de A. Comme nous sommes sur le corps des complexes, A est semblable à une matrice triangulaire T de diagonale constituée de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Pour tout entier k, on remarque alors que la matrice T^k est triangulaire constituée de $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$. Il en résulte :

$$\mathrm{trace} A^k = S_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad .$$

Montrons, alors l'égalité cherchée par récurrence :

$$A_2 = A^2 - \mathrm{trace}(A)A = A^2 - s_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A$$

Ainsi, la formule est vraie pour $k = 2$. La matrice A_{k+1} est donc égal aux matrices suivantes :

$$(A^k - s_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A^{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}s_{k-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A)A - (\mathrm{trace}(A^k)/k)A$$

$A^{k+1} - s_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A^k + \cdots + (-1)^{k-1}s_{k-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A2 - (\text{trace}(A^k)/k)A$
Maintenant, il résulte de l'hypothèse que trace(A^k) est égal à :

$S_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - s_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)S_{k-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + \cdots + (-1)^{k-1}s_{k-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)S_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Nous deduisons alors des formules de Newton :

$$\text{trace}(A^k) = -(-1)^k k s_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

et

$$-(\text{trace}(A^k)/k) = (-1)^k s_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Ainsi, la formule est vraie au rang $k + 1$.

2) Il résulte de la question précédente que

$$-(\text{trace}(A^k)/k) = (-1)^k s_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Le polynôme caractéristique de A est unitaire de degré n et de racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Donc :

$$\det(X\text{Id} - A) = X^n - s_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Il en résulte la formule attendue.

3) De même que pour 1, on montre à partir de la formule donnant A_n que :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A^{n+1} - s_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A^n + \cdots + (-1)^{k-1}s_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A \\ &= (A^n - s_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A^{n-1} + \cdots + (-1)^{k-1}s_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))A \end{aligned}$$

qui est nul d'aprés le théorème de Cayley Hamilton. Il est alors clair que les A_k pour $k \geq n + 1$ sont alors nuls.

Cette exercice fournit un algorithme de calcul du polynôme caractéristique d'une matrice que vous pouvez facilement programmable.