TD : développement 2, équivalence de normes.

**Exercice 1** Soit un espace vectoriel de dimension finie que l'on identifie à $\mathbb{R}^n$. On note donc $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un vecteur $x$ dans la base canonique. On définit la norme $L^\infty$ de la façon suivante

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1\ldots n} |x_i|.$$

1) Montrer qu'il s'agit bien d'une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2) Rappeler que $\mathbb{R}^n$ est complet pour cette norme.
3) Soit $x_k$ une suite de $\mathbb{R}^n$ avec $\|x_k\|_\infty \leq 1$ pour tout $k$. Expliquer pourquoi on peut extraire une sous-suite $x_{\sigma(k)}$ et trouver un $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_{\sigma(k)} - y\|_\infty \longrightarrow 0$.
4) Soit maintenant une autre norme sur $\mathbb{R}^n$ que l'on notera simplement $\|.\|$.
i) Notant $e_i$ le ième vecteur de la base canonique, on pose

$$\alpha = \max_{i=1\ldots n} \|e_i\|.$$

Montrer que $0 < \alpha < \infty$.
ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, prouver que

$$\|x\| \leq n\,\alpha\,\|x\|_\infty.$$

On utilisera l'inégalité triangulaire pour $x = \sum_i x_i e_i$.
iii) Supposons que l'inégalité inverse est fausse, *i.e.* il n'existe aucun $C$ tq $\|x\|_\infty \leq C\|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En déduire qu'il existe une suite $x_k$ tq $\|x_k\| \leq 1/k$ et $\|x_k\|_\infty = 1$.
iv) Utiliser la question 2 pour conclure à une un contradiction.

**Exercice 2** Soit deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un espace vectoriel $E$.
1) On suppose qu'elles sont équivalentes, il existe donc $C,\ C'$ tq

$$\forall x \in E, \quad C\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C'\|x\|_1.$$

Soit $x_k$ une suite convergeant vers $y$ pour la norme $\|.\|_1$. Prouver que l'on a aussi convergence pour la norme $\|.\|_2$.
2) On suppose maintenant que quelle que soit la suite $x_k$ qui converge vers $y$ pour $\|.\|_1$, elle converge également pour $\|.\|_2$. En déduire que les deux normes sont équivalentes.

**Exercice 3** Espaces compacts en dimension finie.
Soit $F$ un sous-espace fermé de $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.
1) Supposons tout d'abord que $F$ n'est pas borné. Construire une suite $x_k$ de $F$ telle que $\|x_k\| \to \infty$ et en déduire que $F$ n'est pas compact.
2) Supposons maintenant que $F$ est borné. En utilisant la question 2) de l'exercice 1 et la question 1) de l'exercice 2, prouver que $F$ est compact.

**Exercice 4** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche à trouver et approcher numériquement un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Ax + b = x.$$

On définit pour cela une suite $x_k$ par récurrence par $x_0 = 0$ et $x_{k+1} = Ax_k + b$. On veut savoir à quelle condition cette suite converge vers $x$.
1) Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Rappeler la définition de la norme matricielle $\|.\|_m$ associée.
2) On suppose ici que $\eta = \|A\|_m < 1$.
i) Prouver que

$$\|x_{k+2} - x_{k+1}\| \leq \eta \|x_{k+1} - x_k\|.$$

ii) En déduire que $x_k$ est de Cauchy, que sa limite est le vecteur $x$ cherché et que pour une constante $C$

$$\|x_k - x\| \leq C\,\eta^k.$$

3) On note $\rho(A)$ le rayon spectral de $A$ (la plus grande valeur propre en valeur absolue).
i) Montrer que

$$\rho(A) \leq \|A\|_m.$$

ii) Prendre pour $b$ un vecteur propre correspondant à cette plus grande valeur propre en valeur absolue. Étudier la suite $x_k$ correspondant.
iii) Conclure qu'une condition nécessaire pour que cet algorithme converge pour tout $b \in \mathbb{R}^n$ est que $\rho(A) < 1$.
4) On suppose finalement que $A$ est symétrique et on note $\|.\|_2$ la norme euclidienne usuelle et $\|.\|_{2,m}$ la norme matricielle associée.
i) Prouver que

$$\rho(A) = \|A\|_{2,m}.$$

ii) En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'algorithme converge pour tout $b$ est que $\rho(A) < 1$.
5) Que peut-on dire si $A$ est seulement diagonalisable ?