Agrégation, septembre 2006

- [Gour] Les maths en tête, Algèbre, X. Gourdon, Ellipse
- [Bri-Mai] Éléments d'algèbre commutative, J. Briançon, Ph. Maisonobe, Ellipse
- [Be-Ma-Pe] Objectif agrégation, V. Beck, J. Malick, A. Peyré, H K
- [Fr-Gi-Ni-1] Exercice de mathématiques , oraux x-ens, algèbre 2
- [Go] Cours d'Algèbre, Godement, Hermann

On se propose de rappeler les premières notions sur déterminant et les matrices illustrées par des exercices.

Nous noterons par $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même pour la loi de composition des applications. La signature d'une permutation $\sigma$, sera notée $\epsilon(\sigma)$,

**Exercice 1** – (définition du déterminant) Soit $X$ un ensemble, $G$ un groupe commutatif (dont nous notons la loi additivement) et une application :

$$f \,:\, X^n = X \times \cdots \times X \longrightarrow G \;\;,\;\; (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)\,.$$

Associons à $f$ l'application $\tilde{f} : X^n \longrightarrow G$ définie par :

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})\,.$$

Montrer que l'application $\tilde{f}$ vérifie les propriétés suivantes :
- (alternée) $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = 0$ s'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$,
- (antisymétrique) si $\sigma$ est une permutation de $\mathcal{S}_n$, alors nous avons :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X^n \;\;;\;\; \tilde{f}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) \tilde{f}(x_1, \dots, x_n)\,.$$

Soit $e_1, \dots, e_n$ une base d'un $K$-espace vectoriel $E$ On note $e_i^*$ le forme linéaire qui associe à un vecteur de $E$ sa ième coordonnée dans la base $e_1, \dots, e_n$. On note $d : E^n \to K$, l'application $n$-linéaire définie par :

$$d(m_1, \dots, m_n) = e_1^*(m_1) \dots e_n^*(m_n) \quad .$$

Montrer que $\tilde{d}$ est $n$-linéaire.
Calculer $\tilde{d}(e_1, \dots, e_n)$.

Soit $(a_{1,i}, \ldots, a_{n,i})$ les coordonnées de $m_i$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Calculer $\tilde{d}(m_1, \ldots, m_n)$ à l'aide des $a_{i,j}$.

L'application $\tilde{d}$ est notée $\det_{\mathcal{B}}$ et appelée déterminant de $E$ dans la base $e_1, \ldots, e_n$. .

Soit $E$ et $F$ deux $K$-espace vectoriel. On note $\Lambda^n(E, F)$ l'ensemble des applications $n$-linéaires alternées de $E^n$ vers $F$. Cet ensemble est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel.

**Exercice 2** – Montrer que tout $h \in \Lambda^n(E, F)$ est antisymétrique.
Soit $n$ vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de $E$, des éléments $(a_{i,j})$ de $K$ et $h \in \Lambda^n(E, F)$. Montrer :

$$h\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}\, e_i\right) = \left[\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}\right] h(e_1, \ldots, e_n)\,.$$

En déduire que si $m_1, \ldots, m_n$ sont des vecteurs de $E$ qui s'expriment comme combinaisons linéaires de $n-1$ éléments fixés de $E$, alors : $h(m_1, \ldots, m_n) = 0$.

Des deux exercices précédents se déduit facilement la proposition de base sur le déterminant.

**Proposition** Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, alors :

1) Il existe une unique forme $n$-linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to K$ telle que :

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1\,.$$

définie par $\det_{\mathcal{B}}(m_1, \ldots, m_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{n,\sigma(n)}$ où $a_{i,j}$ est la $i^{ème}$ coordonnée de $m_j$ dans la base $\mathcal{B}$.

2) Si $N$ est un $K$-espace vectoriel, pour tout $l$ dans $N$, l'application :

$$E^n \to N \quad , \quad (m_1, \ldots, m_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(m_1, \ldots, m_n)\, l$$

est l'unique application $n$-linéaire alternée prenant la valeur $l$ sur la base $\mathcal{B}$.

En particulier, $\Lambda^n(E, K)$ est un $K$ espace vectoriel de dimension 1 engendré par $\det_{\mathcal{B}}$.

Si $M$ est une matrice carrée à coefficient dans un corps, on appelle déterminant de $M$, noté $\det(M)$ le déterminant des colonnes de $M$ dans la base canonique de $K^n$. Ainsi, si $M = (a_{i,j})$ où $i$ est l'indice de la ligne et $j$ de la colonne :

$$\det(\mathrm{M}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_\mathrm{n}} \epsilon(\sigma) \mathrm{a}_{1,\sigma(1)} \dots \mathrm{a}_{\mathrm{n},\sigma(\mathrm{n})} \quad .$$

**Exercice 3** – Soit $E$ un $K$ espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$. On considère l'application :

$$\Lambda^n(u) \ : \ \Lambda^n(E, K) \to \Lambda^n(E, K)$$

définie par $\Lambda^n(u)(h)(m_1, \dots, m_n) = h(u(m_1), \dots u(m_n))$. Montrer que $h$ est bien définie et que $h$ est un endomorphisme. En déduire que $h$ est la multiplication par un nombre. Quel est ce nombre ?.

**Exercice 4** – ([Gour] exercice 10 paragraphe III.5) Soit $E$ un $K$ espace vectoriel de dimension finie $n$. et $h \in \Lambda^n(E, K)$. Pour tout $u$ endormorphisme de $E$, on définit :

$$h_u : E^n \to K \quad : \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} h(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Montrer que $h_u = \mathrm{trace}\,(u) h$.

**Exercice 5** – (matrice compagnon) Soit $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$ un polynôme unitaire à coefficients dans un corps $K$ et $C \in \mathcal{M}(n, n\,; K)$ sa matrice compagnon :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} .$$

1) Montrer que $\det(X\mathrm{Id} - C) = P(X)$.
2) Montrer que l'espace vectoriel $k[X]/(P)$ est de dimension $n$ de base :

$$\mathcal{B} = \{\dot{1}, \dots, \dot{X^{n-1}}\}$$

3) Montrer que la multiplication par $X$ définie un endomorphisme notée $u$.
4) Quelle est la matrice de $u$ la base $\mathcal{B}$ ?
5) Vérifier le théorème de Cayley-Hamilton pour $u$.

**Exercice 6** – (matrice de Vandermonde) Soit $K$ un corps et $K[X]_{\leq n}$ le sous-espace vectoriel de $K[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$. Soit $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n)$ la base duale de la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $K[X]_{\leq n}$. On considère $(y_0, \dots, y_n)$ des points distincts de $K$. et pour $0 \leq i \leq n$ les applications :

$$f_i : K[X]_{\leq n} \to K \quad : \quad P \mapsto P(y_i) \quad .$$

1) Montrer que les $f_i$ sont des applications linéaires. Donner les coordonnées des $f_i$ dans la base $\mathcal{B}$.
2) Cacluler $\det_{\mathcal{B}}(f_0, \dots, f_n)$. En déduire que $\mathcal{B}' = (f_0, \dots, f_n)$ est une base du dual de $K[X]_{\leq n}$.
3) Trouver la base de $K[X]_{\leq n}$ dont $\mathcal{B}'$ est la duale.

**Exercice 7** – (déterminant d'une matrice par blocs) Soit $M$ une matrice carrée à coefficients dans un corps $K$ constituée de la façon suivante par trois matrices carrées $U, V, W$ :

$$M = \begin{pmatrix} U & W \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det M = \det U \det V$.
Soit $M$ un matrice carrée à coefficients dans un corps $K$ constituée de la façon suivante par quatre matrices carrées $A, B, C, D$ de $\mathcal{M}(n, K)$ telles que $D$ et $C$ commutent :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Montrer que : $\det M = \det(AD - BC)$.