TD sur la convergence des séries de Fourier

Soit $f \in L^2([0,\ 2\pi])$, on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\,dx,\ \ S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_n(f)\,e^{inx},\ \ \sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f).$$

1) Écrire $S_n(f)$ et $\sigma_n(f)$ sous la forme de convolution avec deux noyaux notés D_n (noyau de Dirichlet) et F_n (noyau de Fejer).
2) Vérifier que

$$\|F_n\|_{L^1} = 1,$$

et en conclure que $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers f si f est continue et préiodique sur $[0,\ 2\pi]$.
3) Montrer que e^{inx} est une famille orthonormée de L^2.
4) Déduire de la question 2 qu'elle est dense et donc que $S_n(f)$ converge vers f dans L^2.
5) En conclure que pour tout $f \in L^2$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{inx}\ dx \longrightarrow 0,\ \text{quand } n \to \infty.$$

6) Soit $f \in L^p([0,\ 2\pi])$, prouver que $\sigma_n(f)$ converge vers f pour la norme de l'espace L^p.
7) Supposons que pour tout f continue, $S_n(f)(0)$ converge vers $f(0)$.
i) En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus pour la suite de formes linéaires sur $C_{per}([0,\ 2\pi])$ données par $S_n(f)(0)$, prouver que

$$\sup_n \sup_{f\in C_{per},\ |f|\le 1} |S_n(f)(0)| < \infty.$$

ii) Remarquer que

$$\sup_{f\in C_{per},\ |f|\le 1} |S_n(f)(0)| = \|D_n\|_{L^1}.$$

iii) Montrer que

$$\|D_n\|_{L^1} \longrightarrow \infty,$$

et conclure.