TD sur la transformation de Fourier

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathcal{F}f = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\,\xi}\, f(x)\, dx.$$

On étend ensuite la définition de $\mathcal{F}$ à L^2 de la manière habituelle.

1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$, prouver que $f \star g \in L^2$ et que

$$\mathcal{F}(f \star g) = \hat{f} \times \hat{g}.$$

2) Soit $f \in L^1$, on définit l'opérateur T_f sur L^2 par

$$T_f(g) = f \star g.$$

Prouver que

$$\|T_f\| = \|\hat{f}\|_{L^\infty}.$$

3) Soit T un opérateur linéaire borné sur L^2. On définit $\hat{T}$ par

$$\hat{T}g = \mathcal{F}(T\mathcal{F}^{-1}\, g).$$

Expliquer pourquoi $\hat{T}$ est un opérateur borné sur L^2 également.

4) On suppose que T commute avec les translations, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^2$ et pour tout h si l'on définit $f_h(x) = f(x+h)$ alors

$$T f_h = (T\, f)(x+h).$$

En déduire que pour tout $f \in L^2$ et pour tout h

$$\hat{T}(e^{ixh}\, f) = e^{ixh}\, \hat{T} f.$$

5) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, utiliser la densité des polynômes trigonométriques pour obtenir que pout tout $\phi \in C(\mathbb{R})$

$$\hat{T}(\phi\, f) = \phi \hat{T} f.$$

6) Pour tout $R > 0$, poser $f = \mathbb{I}_{[-R,\ R]}$ et en déduire qu'il existe ϕ_R telle que pour tout g à support dans $[-R,\ R]$

$$\hat{T}g = \phi_R \times g.$$

7) Montrer que si $R' > R$ alors $\phi_{R'} = \phi_R$ sur $[-R,\ R]$.

8) Conclure que $\phi_R(x)$ est une suite croissante en R et qu'elle converge donc simplement vers $\phi(x)$.

9) Vérifier que $\phi \in L^\infty$ et que $\forall f \in L^2$

$$\hat{T} f = \phi \times f.$$