Intégrale gaussienne

Le but de cette feuille est de calculer l'intégrale gaussienne

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Exercice 1
1) Montrer que I est bien définie et que

$$I = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

2) Prouver que

$$\left(\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$

3) Passer en coordonnées polaires pour calculer cette dernière intégrale et en déduire que $I = \sqrt{\pi}$.

Exercice 2 On définit la fonction

$$F(t) = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\, dx.$$

1) Vérifier que F est bien définie sur tout $\mathbb{R}_+$ et est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Calculer $F'(t)$ et montrer que

$$F'(t) = F(t) - \frac{I}{2\sqrt{t}}$$

3) Par méthode de variation de la constante, résoudre cette équation pour obtenir que $F(t) = G(t)e^t$ avec

$$G(t) = G(0) - I\int_{0}^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\, dx.$$

4) Prouver que $G(0) = F(0) = \pi/2$.
5) Justifier que F a une limite nulle en $+\infty$ et en déduire I.

Exercice 3 On définit les intégrales de Wallis par la formule habituelle

$$W_n = \int_{0}^{\pi/2} \sin^n x\, dx.$$

1) On va tout d'abord retrouver un équivalent pour W_n.
a) Montrer par intégration par parties que pour $n > 1$

$$nW_n = (n-1)W_{n-2}.$$

b) Déduire de cette dernière inégalité que

$$W_{2k} = W_0 \, \Pi_{l=1}^k \frac{2l-1}{2l}, \quad W_{2k+1} = W_1 \Pi_{l=1}^k \frac{2l}{2l+1}.$$

c) Remarquer donc que $nW_n \, W_{n-1} = W_1 \, W_0 = \pi/2$.
d) Vérifier d'autre part que pour tout $\varepsilon < 1$

$$\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^n t \, dt \leq C\varepsilon^n,$$

et en déduire que

$$W_{n+1} \leq W_n \leq \frac{W_{n+1}}{1-\varepsilon} + C\varepsilon^n.$$

e) Conclure que W_n et W_{n+1} sont équivalents et donc tous deux équivalents à $\sqrt{\pi/2n}$.
2) En utilisant la concavité du logarithme, montrer que pour $0 \leq x \leq \sqrt{n}$

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

3) Faire les changements de variables $x = \sqrt{n} \, \cos t$ et $x = \sqrt{n}/\tan t$ pour obtenir que

$$\sqrt{n} \, W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \, dx \leq \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2} t \, dt.$$

4) En conclure la valeur de I.