

Fonctions holomorphes : Application ouverte, logarithme.

Ex. 1 : l'exponentielle complexe. Lire le prologue du Rudin (p. 1-3) sur la fonction exp.

Ex. 2 : Le théorème de l'application ouverte. On se propose de montrer le résultat : *si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe, et si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors $f(\Omega)$ est ouvert ou réduit à un point.*

1) a) Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f'(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe U et V , ouverts de \mathbb{C} , tels que $a \in U$, $f(a) \in V$ et $f : U \rightarrow V$ soit un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme.

b) En écrivant $V \ni w = f(z)$ pour $z \in U$, vérifier que l'inverse de $f : U \rightarrow V$ est holomorphe (prendre U plus petit si besoin).

c) Retrouver le résultat précédent en utilisant les équations de Cauchy-Riemann ou le fait que df_z soit une similitude directe.

2) a) Si $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'application $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\pi(z) = z^m$ est ouverte *i.e.* si $\omega \subset \mathbb{C}$ est ouvert, $\pi(\omega)$ est ouvert. Si $a \in \omega$, on séparera le cas $a \neq 0$ et $a = 0$.

b) Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose que a est un zéro d'ordre fini $m \in \mathbb{N}^*$ de $f - f(a)$. Montrer qu'on peut supposer $a = f(a) = 0$. A l'aide d'un développement en série entière, montrer qu'il existe un voisinage U de 0 et $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(z) = z^m h(z)$ dans U , avec $h(0) \neq 0$.

c) Justifier qu'il existe un voisinage $V \subset U$ de 0 et $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $h(z) = g(z)^m$ dans V . Démontrer que si $F(z) = zg(z)$ dans V , F est holomorphe dans V et $F'(0) \neq 0$. En déduire qu'il existe un voisinage $W \subset V$ de 0 tel que $F : W \rightarrow F(W)$ soit bi-holomorphe. Conclure alors que $f(W) = \pi \circ F(W)$ est un ouvert contenant 0.

3) Démontrer le théorème annoncé.

Ex. 3 : Logarithmes complexes.

1) a) On définit pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ l'argument de z comme $\text{Arg}(z) = 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$. Vérifier que Arg est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. On définit la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ par $\log(z) = \ln(|z|) + i \text{Arg}(z)$. Démontrer que \log est continue, $\log = \ln$ sur \mathbb{R}_+^* , et que $\exp(\log(z)) = z$ si $z \notin \mathbb{R}^-$, et $\log(\exp(z)) = z$ si $|\text{Im}(z)| < \pi$. Justifier que $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$ en utilisant l'Ex. 2 1).

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Vérifier que la formule $\log_\alpha(z) = \log(e^{i(\pi-\alpha)}z) - i(\pi - \alpha)$ définit une branche du logarithme $\log_\alpha \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}\mathbb{R}^+)$. Pour quel α a-t-on $\log_\alpha = \log$? Justifier que \log et \log_α coïncident sur un secteur angulaire.

2) Application à un calcul d'intégrale. Soit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t^2 + 1)^2} dt.$$

Vérifier l'existence de I . On considère la branche \log du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}^-)$, et on pose $f(z) = \frac{\log(z)}{(z^2 + 1)^2}$. Vérifier que f est méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}^-)$, et déterminer ses pôles, et son résidu. Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, on considère le contour orienté Γ_ε^R défini comme le segment $[\varepsilon, R]$, puis l'arc de cercle $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, puis le segment $[-R, -\varepsilon]$ et enfin l'arc de cercle $\varepsilon e^{i\theta}$, $\pi \geq \theta \geq 0$. Appliquer la formule des résidus à f sur le contour Γ_ε^R . Justifier que les intégrales sur les deux arcs de cercle tendent vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$. En déduire que $I = -\frac{\pi}{4}$, ainsi que la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^2}$.

3) Application à un autre calcul d'intégrale : la formule des compléments.

Calculer, pour $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) \in]0, 1[$ (on peut prendre $s \in]0, 1[$ si on préfère),

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{1+u} du.$$

On utilisera le \log défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, la fonction $f(z) = \frac{e^{(s-1)\log(z)}}{1+z}$ et pour $0 < \varepsilon < 1 < R$ le contour Γ_ε^R défini comme étant le "Pac-Man" défini comme suit. On pose $\theta_0 = \arcsin(\frac{\varepsilon}{R})$, de sorte que $Re^{i\theta_0} = R \cos(\theta_0) + i\varepsilon$, et on définit Γ_ε^R comme le segment $[i\varepsilon, R \cos(\theta_0) + i\varepsilon]$, puis l'arc de cercle $Re^{i\theta}$, $\theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$, puis le segment $[R \cos(\theta_0) - i\varepsilon, -i\varepsilon]$ et un autre arc de cercle $\varepsilon e^{i\theta}$, $-\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2}$ (faire un dessin, bien sûr !). Quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$, justifier que les intégrales sur les arcs de cercle tendent vers 0 et donner les limites des intégrales sur les deux segments. En déduire que $I = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$.

Pour le lien avec la fonction Γ et la formule des compléments, voir par exemple L. SCHWARTZ.

Ex. 4 : Applications conformes.

1) Soit $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ \mathbb{R} -linéaire et injective. On dit que A préserve les angles si pour tous $u, v \in \mathbb{C}^*$, l'angle entre $A(u)$ et $A(v)$ est le même qu'entre u et v .

a) Montrer que A préserve les angles si et seulement si l'argument de $\frac{A(z)}{z}$ est indépendant de $z \neq 0$.

b) En notant $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $A(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$ pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que A préserve les angles si et seulement si $\beta = 0$, i.e. A est une similitude directe.

2) On dit qu'une fonction différentiable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est *conforme* si pour tout $z \in \Omega$, $df_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ préserve les angles. Montrer alors que f est conforme si et seulement si f est holomorphe et f' ne s'annule pas.

Références :

- W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe*. Dunod/Masson. (Ex. 1).
- H. CARTAN, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*. Hermann. Chap. VI (Ex. 2).
- P. TAUVEL, *Exercices d'analyse complexe* (Chap. XI, Ex. 13) Dunod. (Ex. 3, 2).
- L. SCHWARTZ, *Méthodes mathématiques pour les Sciences Physiques*. Hermann. p. 347 à 350.