Idéaux à gauche et à droite de $\mathcal{L}(E)$

Soir E un K-espace vectoriel. On rappelle qu'un idéal bilatère (resp. idéal à gauche, resp. idéal à droite) I de $\mathcal{L}(E)$ est un sous-groupe additif de $\mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $g, h \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in I$, on ait $guh \in I$ (resp. $gu \in I$, resp. $uh \in I$).

Exercice : On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les seuls idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$ sont 0 et $\mathcal{L}(E)$.

Soit I un idéal bilatère de E non réduit à $\{0\}$. Soit $f \neq 0$ dans I, son rang est un entier r compris entre 1 et n. Tout endomorphisme de rang r est semblable à f, donc appartient à l'idéal I. Ainsi, I contient tous les endomorphismes de rang r. Supposons $r < n$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Les projections p (resp. q) sur le sous-espace engendré par $(e_1, \ldots, e_r)$ (resp. $(e_2, \ldots, e_{r+1})$ parallélement à $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ (resp. $(e_1, e_{r+2}, \ldots, e_n)$) sont de rang r. Leur somme est de rang $r+1$. Ainsi I contient tous les endomorphismes de rang $r+1$. En itérant, on obtient que I contient tous les endomorphismes de rang n. Ansi l'identité de E est dans I. Il en résulte que $I = \mathcal{L}(E)$.

Lemme 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\mathcal{L}(E)f = \{u \in \mathcal{L}(E) \ \ker f \subset \ker u\}$$
$$f\mathcal{L}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \ \mathrm{im} u \subset \mathrm{im} f\}$$

Lemme 2 : Soit I un idéal à gauche (resp. à droite) de type fini de $\in \mathcal{L}(E)$. Alors, I est engendré par un élément (il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $I = \mathcal{L}(E)h$ (resp. $I = h\mathcal{L}(E)$).

preuves voir Goblot.

Proposition : On suppose que E est de dimension finie. L'application α (resp. β) de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E vers les ideaux à gauche (resp. à droite) de E qui associe au sous-espace vectoriel V l'ensembles des endomorphismes de E dont le noyau (resp l'image) contient V (resp. est contenue dans V) est une bijection.

On remarque que si I est un idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$, c'est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, il en est de méme de I qui est donc engendré sur k par un nombre fini d'éléments de I. Comme la multiplication par λ dans $\mathcal{L}(E)$ correspond à la composition par l'endomorphisme $\lambda\mathrm{Id}$, il en résulte que I est un idéal à gauche de type fini de $\mathcal{L}(E)$. Ainsi par le lemme 2, il existe $f \in E$ tel que $I = \mathcal{L}(E)f$. Donc par le lemme 1, $I = \alpha(\ker f)$. L'application α est donc surjective. Montrons qu'elle est injective. Soit V_1, V_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Si $\alpha(V_1) = \alpha(V_2)$. Soit u_1 un projecteur ad-hoc de noyau V_1, commme $u_1 \in \alpha(V_1)$, on obtient $u_1 \in \alpha(V_2)$ et $V_2 \subset V_1$. On montre de même à l'aide d'un projecteur de noyau V_2 l'autre inclusion. Ainsi $V_1 = V_2$ et α est injective.
On montre de même que β est bijective.

Remarque : On peut observer que si $\alpha(V) = \beta(W)$, on a $V = \{0\}$ et $W = E$ ou $W = \{0\}$ et $V = E$. Retrouver le fait qu'en dimension finie, les idéaux bilatéres de $\mathcal{L}(E)$ sont triviaux.

Remarque : En dimension infinie, on montre de la même façon que l'application α (resp. β) de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E vers les idéaux à gauche (resp. à droite) de type fini de E qui associe au sous-espace vectoriel V l'ensemble des endomorphismes de E dont le noyau (resp l'image) contient V (resp. est contenue dans V) est une bijection.

En dimension infinie, l'ensemble des endomorphismes de rang fini est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition : Tout idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$ contient l'idéal des endomorphismes de rang fini de $\mathcal{L}(E)$. Si E est de dimension dénombrable, c'est le seul idéal bilatre non trivial de $\mathcal{L}(E)$.

preuve voir Goblot.

Conseil : appeler le développement idéaux de $\mathcal{L}(E)$. Montrer qu'en dimension finie les idéaux bilatères sont triviaux, donner les 2 lemmes qui sont dans Goblot, en déduire la bijection entre idéaux à gauche (resp à droite) et sev de E en dimension finie. Dire qu'en dimension infinie, le résultat reste vrai si l'on se restreint aux idéaux à gauche (resp. à droite) de type fini. Donner en dimension infinie un exemple d'idèal bilatère non trivial.